حوليات آداب عين شمس المجلد ٤٦ (عدد يوليو – سبتمبر ٢٠١٨)
http://www.aafu.journals.ekb.eg
(دورية علمية محكمة)
جامعة عين شمس
كلية الآداب

حساب البناءات
(دراسة تحليلية لبناءات تيري كوكاند)

محمد سيد محمد أبوالعلا *

كلية الآداب جامعة بورسعيد

المستخلص

يناقش هذا البحث بالتحليل مصطلح "حساب البناءات" منذ بدايته في القرنين السادس والسابع عشر، مروراً بالقرن العشرين وأهم إضافات رسل والمناطقة المعاصرين، حتى الوقت الحالي، وهذا البحث في مجمله يناقش الجانب المنطقي لحساب البناءات، كما يلقي الضوء على حساب البناءات عند "**تيري كوكاند** Thierry* Coquand"(١٩٦١ –)"[١]، نظراً لما يتمتع به المصطلح من أهميةٍ كبرى اليوم بين لغات البرمجة الشائعة في لغات الحاسب الآلي مثل "ليسب، ألجول، باسكال،وغيرها" وما يتمتع به كذلك من أهميةٍ في مجال الرياضيات، وقد أكدت فيه أنه رغم تقدم هذه المجالات إلا أن أساسها يظل منطقياً. فعرضت إلى فكرة البناءات من منظورٍ هندسي عند عالم الرياضيات الألماني أويلر في القرن السادس عشر، وتطور هذه الفكرة لتتخذ شكل حسابي التفاضل والتكامل، ثم تناول **رينيه ديكارت** لها في القرن السابع عشر فيما يعرف بفكرة الحل وتأثره بفرانسوا فييت، وتأسيسه للبناءات الجبرية لينتقل مصطلح البناء المنطقي بصورة واضحة من البناء الهندسي إلى البناء الجبري، ثم انتقلت إلى عرض المصطلح عند برتراند رسل ممثلاً في نظرته للفئات والأنماط، وتناوله لفكرة الذرية المنطقية ليتحول المصطلح البناء على يديه إلى بناءٍ منطقي، وقد ركزت على **رسل** نوعاً ما نظراً لما يتمتع به من أهمية منطقية تجعل أساس الرياضيات منطقاً حسب نزعته اللوجستيقية، كما أن مقاله الذرية المنطقية يعد عملاً في الترجمة، وهو ما يتماشى مع هدف البحث، ثم انتقلت إلى محور البحث الأساسي **تيري كوكاند** أحد علماء الحاسب الآلي، وانتقال حساب البناءات إلى لغات البرمجة. فأوضحت كيف سلط حسابه الضوء على مصطلحاتٍ جديدة وأفكار تناولها مناطقة مثل **ألونزو تشيرش** كحساب لامدا، وثورة **كوكاند** على مايعرف بالرياضيات النويثرية التي أسستها الرياضية الألمانية أمالي نويثر، وتأسيسه للجانب الاستقرائي للبناءات مستنداً للجانب النمطي لحساب لامدا، وكيف أدى به الأمر في نهاية المطاف إلى القول بحساب باي، وغيره من المعادلات التي تحكم لغة وطريقة عمل الحاسب الآلي، وامتدادها إلى شتى المجالات التكنولوجية المختلفة، نظراً لما تتمتع به الآن من أهمية في حياتنا اليومية، إلا أن أساسها يبقى منطقياً.

مقدمة:

يتمتع مصطلح حساب البناءات Constructions Calculus بأهميةٍ كبرى اليوم في مجال المنطق الرياضي، لأنه يتخطى مجال فلسفة المنطق إلى المنطق الرياضي التطبيقي applied، وخاصة فيما يتعلق بلغات البرمجة وعلاقة المنطق الحديث بالحاسب الآلي واستخداماته المتنوعة التي بلغت ذروتها بظهور لغة المنطق في أجهزة الذكاء الاصطناعي، والتي تركز عليها عمل مهندسي البرمجة الذين يحلو لهم تسميته بـ "حساب الإنشاءات" ودارسي المنطق على حدٍ سواء، ماجعل المنطق يوصف بالتقدم المذهل الذي يتعدى مجاله العبارات التقليدية والمسائل الكلاسيكية الصورية إلى الجانب التطبيقي، وإن كانت لغات البرمجة والحواسب قد بلغت هذه الدرجة من التقدم، إلا أن أثرها يعود إلى المنطق الكلاسيكي، حتى مع أدق المصطلحات التي استخدمها علماء البرمجة المعاصرون أمثال "**تيري كوكاند**" الذي أعلى من شأن مصطلح "البناءات المنطقية"، بل وجعله محور شرحه الفلسفي لعمله في البرمجة. فنستطيع أن نجد أثر الإرهاصات المنطقية الكلاسيكية واضحاً لديه بصورةٍ تستدعي الرجوع إلى نشأة مصطلح "البناءات المنطقية"، واستخداماته المختلفة، وأهم المناطقة الذين تناولوه بالشرح والتحليل، ومدى التطور الذي وصل إليه الآن.

إشكالية البحث

تكمن الإشكالية الأساسية للبحث في محاولة الإجابة عن التساؤلات التالية:

١. ما المقصود بمصطلح البناءات المنطقية؟
٢. ما علاقة البناءات المنطقية بنظريتي الفئات والأنماط ؟
٣. ما المقصود بالبناءات المنطقية عند "**تيري كوكاند**"؟
٤. ما المقصود بالصيغ الهندسية؟
٥. ما المقصود بالجانب التركيبي للبناءات المنطقية وما علاقته بحساب لامدا النمطي؟
٦. ما المقصود بحساب البناءات الاستقرائية، وإلى أي مدى يمتد هذا الحساب؟

أولاً: الإرهاصات الأولى لحساب البناءات

يعود تاريخ حساب البناءات بشكله المعروف حالياً إلى "**رينيه ديكارت** René Descartes(١٥٩٦– ١٦٥٠)" في القرن السابع عشر؛ حيث انصبت مناقشته للبناءات في باديء الأمر على الفكرة النسقية من الجانب الهندسي، و معرفة حقيقتها، والمعيار المستخدم فيها، و معرفة معايير البناء المقبول هندسياً، وفي سبيله لتحقيق ذلك توسع "**ديكارت**" في المعيار التقليدي لبناء **إقليدس Euclid**(٣٣٠– ٢٦٠ ق.م) الهندسي (كان البناء الهندسي يؤدى من خلال الخطوط المستقيمة والدوائر)[٢].هذا البناء الذي شيدت الرياضيات وفقاً له النسق الاستنباطي الذي يبنى ابتداءً من بديهيات Axioms وتعريفات definitions ومسلمات postulates معينة ليبرهن على مجموعة من النظريات theorems أو اللواحق corollaries باستخدام قاعدة التعويض substitiution أو قاعدة إثبات التالي Modus ponens. فكأن ما يميز الرياضيات كعلمٍ دقيق يتسم باليقين المطلق إنما هو ذلك البناء النسقي المحكم، أو ما يعرف بالنسق الاستنباطي الذي يستمد اليقين من كون الأصول التي يبدأ منها مستقلة independent عن الواقع التجريبي أو عالم الخبرة[٣]. وفي هذا الصدد قدم "**ديكارت**" وسائل جديدة للمنحنيات الجبرية الأبسط، ولم يقبل بفكرة المنحنيات غير الجبرية، الأمر الذي أدى إلى مواجهة علماء الهندسة لهذه

المنحنيات في نهاية القرن السابع عشر؛ ووجدوا أن تعيين **ديكارت** للحدود لم يعد يلائم التطورات الجديدة للرياضيات، ومن ثم لم تكن المناهج الجديدة التي قدمت للبناء مجرد منحنيات جبرية. فكان من بين هذه البناءات تربيع Quadrature المنحنيات الجبرية أو تصحيحها، ومن خلال المنحنيات الجبرية التربيعية يمكن تحديد المنطقة أسفل المنحنى الجبري د(س)، أي أنه أصبح من الممكن تحديد المستطيل عن طريق حساب التكامل Integral Calculus. ويمكن القول أنه منذ ذلك الوقت تحولت مناقشة البناءات من الناحية النسقية إلى الناحية الرياضية، أو من الهندسة إلى الجبر(٤). قبل ظهور الهندسات اللا إقليدية كان قد نشأ علم التحليل analysis وحين تطورت تطور معها. ويشمل التحليل فروع الرياضيات التي تخلصت من الخطوط والأشكال وتصورات المكان بحيث تصاغ صياغة عددية جبرية بحتة، ومن ثم يشمل التحليل علوم الجبر والهندسة التحليلية والتفاضل والتكامل إلى جانب الحساب، ويستبعد الأنساق الهندسية التي لا يمكن تناولها في صورةٍ جبرية(٥).

ظهرت مناقشة مناهج البناء في القرن الثامن عشر في بناء عالِم الرياضيات الألماني **"ليونارد أويلر*** L. Euler(١٧٠٧-١٧٨٣)"، الذي قدمه عام ١٧٣٣، والذي كان بمثابة تمهيد الطريق للهدف الأساسي للبحث: "مقدمة المنهج الجديد لبناء معادلاتٍ تفاضلية Differential Equations"، وفيه أكد وضوح بناء معادلات التفاضل عن طريق فصل المتغيرات، ومنذ هذا الوقت أصبحت جميع بناءات المعادلات التفاضلية ترتبط بفصل المتغيرات(٦). قام "**أويلر**" كذلك بربط التصور الهندسي بالحساب، محاولاً تحسين وتعميم بناء المعادلات المختلفة في بداية الأمر. فقام بتطوير برنامجه التحليلي ليتضح منه مدى اهتمامه بمثل هذه البناءات، وعندما قدَّم معالجة لحساب التكامل ذكر مصطلح هندسة البناءات للإشارة إلى أن حل المعادلات المحددة يعبر عنه الشكل التكاملي، لكنه لم يصور التحليل باعتباره شيئاً مستقلاً. فكان تصويره الرياضي بمثابة آداةً لحل مشكلات الهندسة، مما ترتب عليه اقتراح علاقات بين الكميات الهندسية تنشأ عن معاني التعبيرات التحليلية، اعتبرت هذه العلاقات بمثابة نسخٍ حديثة لمنهج التحليل الكلاسيكي في التطبيق الرياضي، وكان تطبيق هذا المنهج على أي مشكلة من مشكلات الهندسة يتضمن الآتي:-

أ- أن يفترض أن للمشكلة "س" حلاً Solution، وأن فكرة حلها موجودة. ولتكن المشكلة المقصودة هنا مثلاً مشكلة المنحنى الدائري التي أثبتها هندسياً عام ١٦٥٩ والتي تنشأ عند تحرك عجلة في حركةٍ دائريةٍ على خطٍ مستقيم دون انزلاق.

ب- أن يبحث عن نتائج ل"س" قبل أن يأتي بشيءٍ معروفٍ ل"**ن**" (على سبيل المثال، مبرهنة الشرح أو البديهيات المحددة).

في هذه النقطة ينتهي التحليل، ويستخدم المدرسيون التركيب لمحاولة اشتقاق "س" من "ن" من خلال عكس الطريقة التي ذهبوا إليها من "س إلى ن".

قبل عام ١٦٠٠ كانت فكرة الحل تتمثل في المنحنى، أو في أي موضوع هندسي آخر يعاد تقديمه في صورة رسم بياني، كانت هذه الفكرة الشغل الشاغل لعلماء الرياضيات والهندسة، أصبح الحل بعد **"فرانسوا فييت** François Viète (١٥٤٠-١٦٠٣)" و**ديكارت**" في شكل معطيات للمشكلة التي تعبر عنها علامات مميزة وحروفٍ تتألف بصورةٍ مجردة من العبارات، النقطة أ- فقط تتألف من عبارات مثل "لنفترض أن "ك"

ترمز إلى كمية معينة ...، النقطة ب- تتألف من معالجة العلامة س والعلامات التي تعبرعن المعطيات، كما لو أن هناك حلاً"، وقد كان الهدف من وراء ذلك الحصول على صيغةٍ تعبرعن الربط بين حل التحديد، المعطيات، وموضوعات هندسية أخرى معروفة[٧]. وكلمة صيغة معناها أي تسلسلٍ Sequenc نهائي من الرموز، الحدود المصاغة بشكلٍ جيد، المتغيرات الحرة، والمتغيرات المقيدة يمكن تعريفها بعد ذلك من خلال الاستنباط induction[٨].

بدا إذن واضحاً أهمية البناءات في الهندسة التي تمثلت في أنه لا يمكن أن نقول أن حل المشكلة الهندسية يظهر في ثنايا الصيغة التحليلية. فهذه الصيغة التحليلية كانت موجودة قبل ذلك، أعقب وجودها خطوة إضافية ضرورية تمثلت في ترجمة الحل التحليلي إلى حدودٍ هندسية هدفها الحصول على الحل الهندسي الأصلي للمشكلة، هذه الخطوة عرفت ببناء الحل The Construction Of The Solution، أما العلامات التحليلية التي قدمها علماء الهندسة فقُدِّمت دون البرهنة على وجود الأشياء التي رمزوا إليها، والبناء يخدم أيضاً البرهنة على أن المعالجات التحليلية لم تكن مجرد طرق لتلك العلامات، ولهذا السبب أصبح حل الوجود مؤثر بشكلٍ فعال، أو بدقةٍ أكثر يمكننا القول أن بناء الحل يبين أن الصيغة تنتج من المعالجة الرمزية التي تمثل موضوعاً موجوداً بالفعل، و ينتمي بدوره إلى عالم الهندسة، وبالتالي يمكن تبنيه كحل للمشكلة الهندسية[٩].

لم يكن السياق التاريخي لمشكلة البناء في الهندسة هو المدهش فقط بالنسبة لأويلر. فقد قدم عدداً من الأبحاث لبناء حل معادلات التفاضل، وبهذه الأبحاث دخل في نقاشٍ حول معيار البناء عام ١٧٣٣، وقدم فيها أحد أهم أبحاثه الهادفة حول هذا الموضوع بعنوان "**بناء المعادلات التفاضلية التي لا تقبل الفصل بين المتغيرات**"، ضمَّ هذا البحث إعلان لنتيجتين تتعلقان ببناء معادلات تفاضل محددة لا تسمح بمشاركة المتغيرات، كما راعى بعض الاعتبارات في تصور بناء المعادلات. فصاغ نمطان من البناءات:

أ- البناءات الجبرية Algabric

ب- البناءات الفائقة أو "المتعالية" Transcendental

البناءات الجبرية كانت بناءات مألوفة (مستوية، صلبة، بناءات خطية)، تظهر أهميتها في التعبير عن جذور المعادلات الجبرية، وتقدم في صورة منحنيات متقاطعة طبقاً لمعادلاتها.

البناءات الفائقة: تؤدي من خلال معنى التربيع quadratures أو التصحيحات التي تستخدم عند استحالة التعبير عن حلول معادلات التفاضل بالدالة الجبرية.

لم تكن صياغة "**أويلر**" هي البناء الوحيد الذي قدمه للمعادلة الجبرية أو الدالة الفائقة **((س) = صفر)** من متغير واحد. فقد قدم أيضاً في تناوله للمعادلات الجبرية أو الفائقة الصيغة التي تحتوي على متغيرين **((س، ص) = صفر)**، وهذا البناء الأخير دعا لقيام نظرية لحساب قيمة المتغير التابع dependent، التي تعطي القيمة للمتغير المستقل independent. لخص "**أويلر**" الفرق بين البناءات الجبرية والفائقة من خلال ملاحظته اعتماد البناءات الجبرية على عدة مصادرات تختلف عن الفائقة، منها: (١) أن العبارة "دائماً من الممكن بناء أي دالة جبرية لكمية محددة ك". غير كافية للبناءات الفائقة التي تتطلب الافتراض التالي: (٢) أي دالة فائقة **(د) ك د ك** للكمية **"ك"** يمكن اعتبارها بناءً[١٠].

يتضح أن البناء أخذ شكلاً تحليلياً هندسياً أول الأمر عند أويلر، ثم انتهى بصياغة معادلات لا تقبل الفصل بين المتغيرات، أي أن المكان (الهندسي) كان أساساً لليقين

الرياضي (المعادلات الرياضية بأشكالها). فبدأ التحليل مرتبطاً بالهندسة والاتصال المكاني. ولكن بتوصل **كوشي** Caushy (١٧٨٩- ١٨٥٧) إلى اكتشاف دالات منفصلة discontinuous، تولّد الشك في المكان الهندسي، ومن ثم الشك في أحد أسس التحليل، وتبع **كوشي** رياضيون آخرون اكتشفوا أفكاراً رياضية أدت إلى نبذ فكرة الحدس المكاني. اكتشف الرياضيون حينئذٍ أن التحليل قد فقد مصدر يقينه وهو المكان المتصل. فاضطروا إلى البحث عن مصدر آخر لليقين، لقد تأكد هذا الموقف ــ وهو أن المكان لم يعد أساساً ليقين العلم الرياضي ــ بعد ظهور الهندسات اللا إقليدية وتطورها، ذلك التطور الذي انطوى على نبذ فكرة المكان والرسوم، مما أدى إلى ظهور حركة (تحسيب التحليل) أو تحويل التحليل إلى حساب Arithmetisation Of Analysis والمقصود بها التماس يقين التحليل في يقين علم الحساب، لكن علم الحساب كان مشغولاً وقتئذٍ بمشكلات أنواع الأعداد التي ظهرت فيه، ومن ثم تلزم محاولة تعريف تلك الأنواع من الأعداد وذلك بردها إلى الأعداد الطبيعية، ولقد وجدت الآن مشكلة جديدة هي استحالة القيام بهذا الرد دون إقامة علم الحساب نسقاً استنباطياً له حدوده الأولية وتعريفاته ومصادراته ونظرياته المستنبطة[١١].أي بكل بساطة استقلال الحساب عن الهندسة، وهو ما يعني انتقال مفهوم البناء صراحة من الهندسة إلى الرياضيات، ولكن ماهي السمات أو الملامح العامة لهذا البناء؟

أدى استقلال الهندسة عن المكان إلى افتقادها إلى أساس يقينها، وبالتالي كان لا بد من البحث عن أساسٍ جديدٍ تبني عليه الهندسة قضاياها ويكون أساس يقينها. وقد وجدت الهندسة في "**البناء المنطقي**" للنسق الهندسي أساساً جديداً لليقين. فإذا كنا نقبل بالأنساق الهندسية قديماً لأنها متطابقة مع المكان المتاح لنا. فإننا اليوم نقبلها فقط لأنها متسقة منطقياً مع نفسها. فقد أصبح واضحاً لدى جميع الرياضيين أن قوة النسق ترتبط بمدى التزامه بالشروط المنطقية للأنساق، وأن هذا الالتزام هو الكفيل بمنح النسق صفة اليقين. ويمكن تحديد الشروط المنطقية للأنساق بتحويل الكائنات الهندسية – أو أي كائنات رياضية – إلى فئاتٍ منطقية Logical Classes. فالهندسة النظرية المجردة لم تعد تستخدم ألفاظ النقطة والمستقيم والسطح، وإنما أصبحت تشير إلى هذه الكائنات عن طريق الرموز أو المتغيرات Variables. كما أصبحت تشير إلى العلاقات بين الكائنات الهندسية بالثوابت Constants المنطقية، كاللزوم والعطف والنفي والفصل والتكافؤ. وهذا يؤدي إلى رفض كل المسلمات والتصورات التي تستند بداهتها إلى حدس المكان، بحيث تحل معاني الفئات والعلاقات المنطقية بدل المعاني المستمدة من الحدس المكاني. فمعنى النقطة والمستقيم والسطح لم يعد مستمداً من المعاني المألوفة التي تعود إلى أشكال هندسية لها صلة بالمكان، وإنما تستمد من الفئات المنطقية التي تنتمي إليها النقاط والمستقيمات[١٢]. و كتطورٍ للاتجاه السابق نشأ عنه اتجاه آخر في فلسفة الرياضيات هو الاتجاه اللوجيستيقي logistic ويعني رد التصورات الأساسية لعلم الحساب ــ تعريف الأعداد والعمليات الحسابية المختلفة ــ ومن وراء الحساب فروع الرياضيات جميعاً إلى تصورات منطقية بحتة، وطور هذا الاتجاه "**برتراند رسل** Bertrand Russell (١٨٧٢- ١٩٧٠) و "**وايتهيد** Alfred North Whitehead (١٨٦١- ١٩٤٧)"[١٣]. لكن كان لرسل منفرداً الباع الطويل في هذا الأمر. فما المقصود بالبناءات المنطقية عند رسل؟

ثانياً: مفهوم البناءات المنطقية عند رسل

استخدم "**رسل**" مصطلح البناء المنطقي Logical Construction لوصف سلسلةٍ متشابهةٍ من النظريات الفلسفية بدأها عام ١٩٠١ تعرف باسم (**فريجه* – رسل**)" كتعريفٍ للأعداد بوصفها فئات لفئاتٍ عددية. فقام بتعريف الأعداد على سبيل المثال بوصفها فئاتٍ لفئاتٍ عددية متكافئة، وهي ماتعد بشكلٍ مباشر حالة لبناء نمطٍ للكيان باعتباره فئة للبناءات الأخرى[١٤].أو بوصفها سلسلة من الجزئيات Particulars، تتجمع معاً في شكل حسابٍ لبعض الخصائص التي توصف بأنها وحدات كاملة[١٥].وتختلف البناءات المنطقية حول كونها تتضمن تعريفاتٍ واضحة explicit أو تعريفاتٍ سياقية contextual، وتختلف أيضاً في امتدادها، بحيث يمكن أن يقال أنها تمتد إلى النتيجة بهدف توضيح الموضوع المبني، أي أنها كانت مجرد "تصنيف Fiction"، ولم يستكمل "**رسل**" المحتوى بالاعتماد على بديهيات "**بيانو**Peano (١٨٥٨– ١٩٣٢)" باعتبارها أساساً لنظرية الأعداد الطبيعية. فقد تبين له كيف يمكن رد خصائص الأعداد منطقياً. فقام بتعريف المفهومات الأساسية ل "العدد"، "التالي Successor"، "الصفر"، واقترح أن يظهر في تعريفات مختارة بعناية لهذه المفهومات الأساسية عن طريق حدود للمفهومات المنطقية، ورأى أنه يمكن اشتقاق تلك البديهيات من مباديء المنطق وحدها[١٦].

وفي سياق حديثه عن البناءات المنطقية للأعداد اقترح "**رسل**" أن تحل فئة كل الأزواج محل العدد الأصلي٢، و أن تحل فئة العبارات الوجودية محل الوصف المحدد، وتأتي شهرة هذه الحالات التي قدمها رسل للفئة عندما انتقل من المثال على موضوع مادي مثل "المكتب الذي يجلس عليه، أوالمنضدة، ... وغيرها"، واعتبر هذه الموضوعات المادية في جوهرها بناءات منطقية، بعيداً عن الأحداث وعن معطيات الحس Sense-data. فقد أخذ الفلاسفة هذا المثال بمعنى "تجمع Collection" مرة، وبمعنى "فئة من الجزيئات" مرةً أخرى، (مع علاقات لا تشكل جزءًا أساسياً من البناء). لكن هذا المعنى بالذات يمثل أحد البناءات المنطقية التي تكون في شكل سلسلة، بمعنى أن جزئياتها تتدرج تحت العلاقة المتسلسلة، وهذا هو السبب الرئيسي الذي أدى إلى إساءة فهم فلسفة **"رسل"*** المملؤة بمثل هذه الأمثلة. فقد اعتقد بعضهم بسبب هذا المثال أن الفئات وسلسلة الجزئيات يمكن تبديلهما، أي أنه يمكن استخدامهما بمعنىً واحد. فتارةً يرى الفلاسفة أن كل البناءات المنطقية عند **رسل** تندرج تحت مفهوم الفئات، وتارةً أخرى يرون أن مجموع هذه البناءات هو الذي يكون الشيء المراد تصنيفه (أي أن الشيء هو مجموع البناءات التي تمثله)، وسبب ذلك أنهم رأوا أن سلسلة الجزيئات لا تختلف كثيراً عن مفهوم الفئة، وكمثالٍ على هذا الاختلاف حول تفسير بناءات **رسل** قال "**مارك سينسبري** R. M. **Sainsbury****(١٩٤٣–)": "إن **كل بناءات رسل تعتبر فئات**"، أما "**جيرارد ياجر** Gerhard Jager" فقد قال أن **رسل** في كتابه "**معرفتنا عن العالم الخارجي**" جعل الموضوع الخارجي يتطابق مع الفئة التامة Total لكل معطيات الحس الفعلية والممكنة التي ترتبط بها، أما **لويس** C. I. Lewis (١٨٨٣–١٩٦٤) فقد اتفق معه في أن "الشيء ... يمكن تعريفه بأنه تجمع أو (فئة) من جميع الجوانب الممكنة"، بالطبع في حالة السلسلة يظل البناء فئة، لكن بشكلٍ مهم وحاسم يكون شيءٌ آخر، وهذا الشيء الآخر تكرر إغفاله[١٧].

وكما تناول "**رسل**" الأعداد وعلاقتها بالفئات قام كذلك بتعريف الأعداد اللا منطقية تعريفاً تاماً باستخدام الترتيب والتي تعد أيضاً نوعاً من البناءات المنطقية، كما رأى أن هناك فصلاً جديداً من الأعداد الترتيبية المتصاعدة Transfinite قد أدخل، وأمكن بفضله الحصول على نتائج في غاية الأهمية، وفي مجال الهندسة نجد أن طريقة "**شتاوت** Karl Georg Christian von Staudt (١٧٩٨-١٨٦٧)" لرسم الشكل الرباعي التام، وبحوث "**بيري** Mario Pieri (١٨٦٠ -١٩١٣) في الهندسة الإسقاطية قد بينت كيف تجرى النقط والخطوط والسطوح المستوية في ترتيبٍ مستقلٍ عن الاعتبارات القياسية وعن المقدار، وذلك على حين نجد أن الهندسة الوصفية* تثبت أن قسطاً كبيراً من الهندسة لا يتطلب غير احتمال وجود الترتيب المتسلسل. هذا فضلاً عن أن فلسفة المكان والزمان بأسرها تتوقف على وجهة النظر التي نسلم بها عن الترتيب، ومن أجل ذلك رأى أن البحث في الترتيب أصبح جوهرياً في فهم أسس الرياضيات. وفي هذا السياق أكد "**رسل**" أن التطورات الحديثة قد زادت من أهمية الترتيب من الوجهة الرياضية البحتة زيادةً لا يمكن المبالغة في وصفها. وأن "**ديدكند** Dedekind (١٨٣١- ١٩١٦) و**كانتور** Cantor (١٨٤٥-١٩١٨) و**بيانو**" قد أثبت كلٌ منهم كيف يؤدي الحساب والتحليل على متسلسلة من نوع خاص، أي على خواص الأعداد المتناهية والتي يتكون بفضلها ما يسميه متوالية Regoressi[١٨]. يرجع الفضل في صياغة هذه المتواليات إلى مثال صاغه "**رينيه ديكارت**" يمثل متوالية هندسية؛ حيث قال "نحصل على ٦ بمضاعفة الثلاثة، ثم على ١٢ بمضاعفة الستة، إلخ. وهذا المثال يعلمنا أن كل طرف جديد نحصل عليه يتحدد بشيئين: يمكن القول بدون شك أن ٦ مستنتجة من ٣ ولكن ليس من ٣ وحدها فقط. ثم رأى أن تكرار العلاقة يضع كل الأطراف في سلسلة متراتبة، منضدة. فهي لا تُعطي الأطراف بالصدفة بحيث ينبغي علينا ترتيبها فيما بعد؛ إن الترتيب الذي يظهر كل الأطراف هو الذي يحددّهُ، وأخيراً نرى أن استنتاجاً من هذا النوع ذو خصوبة لا متناهية، وأن هذه الأطراف بالرغم من لا تناهيها، يمكن تحديدها بيقينٍ مُطلق، وكل هذه الخواص تعود ليس إلى خاصية الطرف الأولي، بقدر ما تعود إلى خاصية العلاقة. فهذا الطرف الأولي ليس دائماً مطلقاً حقيقياً، إذ يمكنه أن يتبع لعلاقةٍ ما بطرفٍ آخر، إلى أن نصل في النهاية إلى مطلقٍ حقيقي، ويعتبر أهم ما في منهج "**ديكارت**" اهتمامه بالعلاقات[١٩]. بعد ذلك برهن "**كانتور**" على أن مفهوم وجود فئة واحدة إضافية يعني وجود عددٌ أصلي لا متناهٍ يمثل مفهوم كل الفئات اللامتناهية، وهذا الأمر يفترض أن كل الفئات اللامتناهية تتشابه مفهوماتها، أي إنه يمكن ربط أعضاء أي فئتين لا متناهيتين بغض النظرعن وجودهما الفردي الذي تدحضه الكليات، وبناءً على نتيجة هذا البرهان أسس القسم الواقعي للرياضيات الذي ربط من خلاله الأنواع اللامتناهية بالأعداد الأصلية اللامتناهية[٢٠].

أما بالنسبة لقول "**رسل**" بالفئات أو متسلسلة الجزئيات. فإنه ميز بذلك الحالات التي ربما لا تكون علاقات مسلسلة (ولا تكون نموذجية) متضمنة، عن الحالات التي تفسر جزءاً مهما من البناء، على الرغم من أن هذه النقطة الأساسية تمر بصفةٍ عامة دون أن يلاحظها أحدٌ لسوء حظه. فالمثالان اللذان استخدمهما "الأعداد الأصلية Cardinal Numbers، والأوصاف المحددة Definite Descriptions" يستخدمان **نصل أوكام**** Occam's Razor الذي اعتبره "**وايتهيد**" واحداً من المفهومات المهمة التي تعبر عن قابلية التطبيق في المنطق الرياضي، ومن ثم قام بتطبيقه على المجالات الأخرى ليحل

محل "**البناءات المنطقية**" عندما يكون لبعض الكيانات خصائص منطقية مميزة. يتضح في حالاتٍ كثيرة أن الكيانات المفترضة يمكن استبدالها ببناءاتٍ منطقية محضة تتألف من بناءات لا تشبه الصفات المميزة، وفي هذه الحالة عند تفسير مجموعة من القضايا التي نعتقد بها نجد أنها تمثل كيانات مفترضة، يمكننا أن نستبدل البناءات المنطقية دون إحداث أي تبديل لتفاصيل مجموعة القضايا، وهذا أمرٌ جيد، لأن الكيانات Entities ذات الصفات المنطقية دائماً ما يتم استبدالها، وإذا ظهرت القضايا التي يمكن تفسيرها دون القيام بهذا الاستدلال. في هذه الحالة سيفشل دعم الاستدلال، لكن مجموعة القضايا يتم تأمينها ضد الحاجة إلى خطوة مشكوك في سلامتها(٢١).

أضاف "**رسل**" بعد الأعداد الطبيعية السلاسل series، الأعداد الترتيبية، والأعداد الحقيقية إلى قائمة بناءاته المنطقية، ثم اختتمها ببناء المادة، وأصبحت المشكلة الأساسية لتفسير مفهوم "**البناء المنطقي**" تكمن عنده في فهم طبيعة الأمثلة التي يقدمها، وكيف أن بناء المادة يمكن مقارنته بكلٍ من البناءات المبكرة للأعداد بوصفها فئات، أو نظرية الأوصاف المحددة، و "اللافئات" نظرية الفئات. وفيها رأى أنه لا توجد تعبيرات "خيالية" أو "رموز غير تامة" أو حتى "بنائية الشكل" تلائم تحليل الميزات الأساسية للعالم الطبيعي المألوف، والموضوعات المادية التي تشغله(٢٢).وطبقاً لرأيه لا يمكننا أن نتعرف على الموضوعات المادية، لكن هذا يعني أن كل جملة تضم حداً للموضوع المادي، مثل جملة "تلك المنضدة" التي يجب أن نُحلل من خلال حدود لا تقدم أي استدلال على أي موضوعات مادية. لكن إذا استطعنا أن نُحلل كل جملة عن الموضوعات المادية من خلال جملة لا تذكر مباشرة الموضوعات المادية، حينئذٍ فإن كل الحقائق سوف تضم موضوعات مادية تتطلب شرح صدق جميع الجمل على الإطلاق.

لكن "**رسل**" أكد أن الموضوعات المادية غير ضرورية لتفسير صدق أي جملة يمكننا فهمها، كما استخدم مبدأ للتعرف على كيفية تحليل كل جملة تتناول موضوعاً مادياً من خلال حدود لا تذكر موضوعاتٍ مادية. فرأى أن الموضوعات المادية هي بناءات منطقية بعيدة عن معطيات الحس، أي أنه يمكننا أن نفهم من ذلك أن **رسل** يود أن يقول أنه لا توجد حقاً مثل هذه الأشياء التي تعتبر موضوعاتٍ ماديةٍ مثل "المناضد، الكراسي". فهي جزءٌ من معطيات الحس، نجربها عندما نقوم بها، عندما نقول "انظر إلى الموضوعات المادية، أو اسمع الموضوعات المادية، أو المسها، أو ...."(٢٣).

اقترح "**رسل**" أن تصبح الموضوعات المادية العادية فئات لمعطيات الحس بدلاً من أن تأتي في شكل سلسلة للشيء نفسه، و يتبدد هذا الغموض الواضح في هذه الجزئية عند رسل من خلال تناوله فرقان حيويان داخل الحساب: (أ) الموضوع المادي في لحظةٍ ما. في مقابل الموضوع مع مرور الوقت، (ب) وجهة نظر المُلاحظ (ملاحظ واحد يقوم بملاحظة الموضوع) في مقابل وجهات نظر العديد من المُلاحظين، وهذان الفرقان ينتجان حالاتٍ أربع يوضحها الجدول التالي:

الموضوع المادي	في لحظة	مع مرور الوقت
بالنسبة لمُلاحظ واحد	(فئة معطيات الحس (بصري، سمعي، لمسي، إلخ)	سلسلة من فئات معطيات المعنى لفئات معطيات المعنى
بالنسبة للعديد من المُلاحظين	سلسلة من فئات معطيات الحس	سلسلة من سلاسل الحس

بالنسبة لمُلاحظٍ واحد في لحظة، يسمى الحس المشترك Common Sense موضوعاً مادياً يمثل فئة لمعطيات الحس، وكل عضو في هذه الفئة له علاقة إدراك تختلف عن أي عضوٍ آخر، لكن ليست علاقة متسلسلة بالنسبة لمُلاحظٍ مع مرور الوقت، كما تشكل الفئات المتنوعة المتكررة في لحظةٍ ما لمعطيات الحس سلسلة من العلاقات تختلف من عضوٍ لآخر، إضافة إلى العلاقة المؤقتة للسلسلة بالمتوالية[٢٤].

لم يتوقف إسهام **رسل** في حساب البناءات المنطقية على ذلك فحسب. فقدم نظريتي "**الأوصاف**" و"**الأنماط المنطقية** Theory Of Logical Types"، وهما من أهم ماقدمه في المنطق الرياضي. ومما يجدر الإشارة إليه أنه لم يسبقه أحد في القول بهما.

ولقد فرق **رسل** في نظريته عن "**الأوصاف**" بين نوعين من الأوصاف: أوصاف محددة Definite، وأخرى غامضة ambigious، العبارة الوصفية المحددة هي عبارة وصفية مفردة مسبوقة بأداة التعريف وذلك مثل "الرجل ذو القناع الحديدي" أي أن العبارة الوصفية المحددة تصدق على شخصٍ بعينه.

أما العبارة الوصفية الغامضة فهي عبارة في صيغة نكرة ومن أمثلتها "إنسانٌ ما a man " "كلبٌ ما a dog"، وقد نجد عباراتٍ وصفية من كلا النوعين لا تصدق على كائنٍ ما، ومن ثم فإنها تمثل العبارات الوصفية التي لا صدق لها[٢٥].وقد أدت نظرية الأوصاف عند **رسل** إلى حسم مشكلة الفئات الصفرية. فإذا كان مفهوم الفئة هو أنها تكون ذات أعضاء؛ فإنه يستحيل أن نقول بفئة وتكون خالية من الأعضاء، لأن ما كان مجرد جمع للحدود لا يمكن أن يقوم إذا ارتفعت جميع الحدود. ولكن بناءً على التفرقة بين الفئة، وتصور الفئة، وفئة التصور لن تكون هناك فئات صفرية، بل ما يكون صفرياً أو خالياً من الأعضاء هو فئة التصور (أي المفهوم) وتصور الفئة (اللفظة الدالة على الفئة). وبناءً عليه يمكن القول أن نظرية الأوصاف عند **رسل** تهدف إلى تحقيق مايلي:

١- التفرقة بين أنماط اللغة (اللغة الشيئية وما بعد اللغة).

٢- التفرقة بين المفهوم والماصدق مما أدى إلى حل متناقضة الهوية[٢٦]. حيث قال أن أي زوج يعتبر فئة مكونة من عضوين يمكن وصفه في فئةٍ أخرى تتطابق مع أي فئةٍ أخرى، وبالتالي تكون كل الأزواج متكافئة عددياً، ومن ثم يتطابق العدد "اثنان" مع فئة جميع الأزواج، وعندما تكون العلاقة بين الفئات العددية متكافئة مثل غيرها. فإن العلاقة تصور رمزياً وحدها التماثل similarity في شكل حدود منطقية للأسوار تتطابق مع الأعداد المعرفة بشكلٍ جيد[٢٧].

عندما أراد **رسل** إحكام البناء المنطقي نادى بأهمية الترتيب الزمني للأوصاف الذي غرضه التفرقة بين الوقائع العامة والوقائع الجزئية التي يستعين بها في وصف العالم، ذلك لأنه توجد أنواع كثيرة من الوقائع المختلفة، تعني بقدرٍ معين من تصنيف الوقائع، ولذلك ليس لك أن تتخيل أن الوقائع كلها متشابهة. إنه توجد "وقائع جزئية" مثل "هذا أبيض"، كما توجد وقائع عامة، مثل "كل الرجال فانون". وبالطبع فإن التمييز بين الوقائع الجزئية والوقائع العامة واحدٌ من التمييزات الهامة جداً. ومن الخطأ الجسيم أن تفترض أنه باستطاعتك وصف العالم تماماً عن طريق الوقائع الجزئية الموجودة في الكون على أساسٍ زمني وأنه لا توجد بعد أي واقعة جزئية مفردة من أي نوع في أي مكان لم تضعها في ترتيبها الزمني. فإنك سوف تبقى غير حاصلٍ على وصفٍ كاملٍ للكون إذا لم تضيف قائلاً: "هذه الوقائع التي رتبتها على أساس زمني هي كل الوقائع الجزئية الموجودة

هنالك"، ومن ثم فيجب ألا تأمل في وصف العالم بدون الاستعانة بالوقائع العامة تماماً مثل الوقائع الجزئية[٢٨].

أشار "**رسل**" نفسه في كتابه "**مقدمة للفلسفة الرياضية**١٩١٩" قائلاً: "ليست الرياضيات إلا أنماطاً من العلاقات تُعالج بالأسلوب الرمزي"[٢٩]. ومن المعروف أنه أول من وضع نظرية الأنماط من أجل تحاشي المتناقضات التي ظهرت في كلٍ من الأنساق المنطقية والرياضية. وقد لاقت هذه النظرية اهتماماً كبيراً من جانب الكثير من المناطقة أمثال **رامزي** Ramsey Frank Plumpton(١٩٠٣–١٩٣٠) و **كواين**Quine* (١٩٠٨–٢٠٠٠) اللذان قاما بتبسيطها[٣٠].

استمر بناء "**رسل**" لمفهومات الزمكان** Space Time and material والمادة بعد عام ١٩١٤، و منذ عام ١٩٢٠ ظهرت البرهنة على دلالة "**البناء المنطقي**" باعتباره منهجاً في الفلسفة التحليلية، واقترح طرقاً متعددة لتفسير مفهومه، بعضها مستوحىً من تطور مشروعاتها الخاصة من خلال تقديم أمثلة لتلك البناءات، وقد أثر مفهوم البناء المنطقي لرسل أيضاً في "**كارناب** Carnap(١٨٩١– ١٩٧٠) الذي قال ببناء العالم المادي من خلال التجربة، و **كواين** في حديثه عن مفهوم التفسير أو الشرح[٣١].

وصفَ **رسل** قضاياه المنطقية "بالبناءات منطقية" كذلك في مقاله **"الذرية المنطقية"** الذي نشره عام١٩٢٤ واعتبر الصيغ الأولى المحددة لمنهجه الخاص الذي يستبدل فيه الاستدلال ببناء منهجاً عاماً في الفلسفة، كما يعد هذا المقال عملاً في البرمجة، حيث وصف في بدايته تعريفات منطقية متنوعة، وقدم للتحليل الفلسفي بوصفه بناءً منطقياً. فوضع أمثلة لبعض التعريفات عرفت باسم "**فريجه ــ رسل**"، كتعريفه للأعداد بوصفها فئات، ونظرية الأوصاف المحددة، وبناءات المادة من معطيات الحس ومن السلاسل، والأعداد الترتيبية Ordinal، والأعداد الحقيقية real، كما استخدم التعريف "السياقي" للتعبيرعن الفئات أو الطابع المميز لنظرية الأوصاف المحددة،وقام بتسمية هذه التعبيرات باسم الكيانات "أو الرموز غير المكتملة"، وجعل الكيانات أنفسها "تصنيفاً منطقياً أو رمزياًSymbolic"[٣٢].

نبَّه "**رسل**" إلى أنه قد يُفترض في فلسفةٍ كالذرية المنطقية أن يبدأ المرء باكتشاف أنواع الذرات التي تتكون منها "**البناءات المنطقية**"، قائلاً: "لا أظن أن ذلك هو أول شيء تماماً، ولكنه بالأحرى أحد الأشياء الأولية، وأنه يوجد سؤالين آخرين يجب أن يضعهما المرء في اعتباره أحدهما على الأقل سؤال أوليٌّ:

١- هل الأشياء التي تبدو ككيانات منطقية مركبة هي في الحقيقة مركبة؟
٢- هل هي في الحقيقة كيانات؟

ويأتي قبل كل ذلك سؤالٌ آخر: ماذا يجب أن نأخذ كأمثلةٍ أولى للكيانات المركبة منطقياً؟ في الحقيقة هذا أول سؤال يجب أن نبدأ به على الإطلاق. كذلك ما نوع الأشياء التي يجب أن نعتبرها مركبة للوهلة الأولى؟

بالطبع، تبدو كل الأشياء العادية للحياة اليومية ككيانات مركبة، ومن أمثلة ذلك المناضد والكراسي والأرغفة والأسماك والأشخاص والقوى. فهذه كلها تبدو كيانات مركبة إذا نظرنا إليها من السطح. فكل الأشياء التي نخلع عليها في العادة أسماء أعلام هي كيانات مركبة مثل، سقراط، وورومانيا، والليلة الثانية عشر، أو أي شيء آخر تحب أن تفكر فيه، وتطلق عليه اسم علم. فكل هذه الأشياء كما تبدو كيانات مركبة، وهي تبدو

كأنساق مركبة مرتبطة بعضها ببعض في نوعٍ من الوحدة، تلك الوحدة التي تـؤدي إلـى منحها اسماً واحداً[٣٣].

أصبحت المشكلة الأساسية بعد مرحلة برينكيبيا تتمثل في بديهية الاكتمـال، وبنـاءً على هذا الأساس بقي التفسير البسيط لنظرية الأنماط، لكن إلى أي مرحلة وصل حسـاب البناءات في المنطق الرياضي بعد برينكيبيا؟

ثالثاً: مفهوم البناءات عند "تيرى كوكاند" وأهدافها

أ- مفهوم البناءات عند كوكاند

تطورت حساب البناءات بعد تقديم **رسل** للذرية المنطقية. فقد اعتبر هذا العمل عملاً فـي البرمجة، وإن كان رسل لايعرف له تطبيقاً في وقته، إلا أن هناك الكثيـر مـن الحقـائق الرياضية مثلاً لا يعرف له تطبيقاً، وذلك مثل الأعداد الخياليـة التـي ظـل الرياضـيون يهربون من استعمالها والاستفادة منها زمناً طويلاً[٣٤].

ظهرت العديد من نسخ حساب البناءات فيما يتعلق بلغات البرمجة والحاسب الآلي، لكن من بين هذه النسخ تعد الصياغة التي تعتمد على حسـاب كـلٍ مـن "**تيري كوكاند**"، و"**جيرارد هيوت** Huet.Gerard*(١٩٤٧-)" الأهم[٣٥]. وقـد جـرت بعـد ذلـك المناقشات الفلسفية والرياضية بالتوازي، وقد ترتب عليها إهمال بعض الفروق الأساسـية من الجانب الرياضي ذي الطابع الفلسفي، في حين اتخذ الفلاسفة في بعض الأحيان الأطر الفنية التي يستخدمها علماء الرياضيات دون التشكيك في الدافع الفلسفي الكامن ورائها[٣٦].

لكن يجب أن نعرف أن مسألة البناءات تعود في الأساس إلى تفسير العلاقـة بين المنطق والرياضيات، ومشكلة الاكتمال، وهذا ما يدعونا إلى تفسير هذه العلاقـة أولاً، وتوضيح هذه المشكلة قبل الحديث عن بناءات "**كوكاند**" باستفاضة.

فُسِّرت العلاقة بين المنطق والرياضيات بثلاث طرق مختلفة على الأقل:

(١) المنطق الرياضي بوصفه منطقاً رمزياً، أو منطقاً يستخدم الرمزية الرياضية.

(٢) المنطق الرياضي باعتباره أسساً (أو فلسفة) للرياضيات.

(٣) المنطق الرياضي كمنطق يُدرَّس من خلال المناهج الرياضية.

(٤) ونحن نهتم هنا بالمنطق الرياضي بالمعنى الثاني، كما أن ما نقوم به يعد في مجملـه منطقاً رياضياً بالمعنى الأول، و ليس بالمعنى الثالث على أية حال.

بقيت مشكلة أساسية بعد برينكيبيا ماثماتيكا هي مشكلة "الاكتمـال Complete" والتي تعني تحديد بديهية "الرد** The Axiom Of reducibility" أو (بديهية الإدراك اللا محمولية Impredicative)، حيث قال مؤلفي برنكيبيا بتفـرع الجانـب المحمـولي لنظرية الأنماط، لكنه لم يكن وحده كافٍ لاشتقاق حتى الأجزاء الأولية للتحليـل. ولهـذا السبب أضيفت بديهية "الرد" على الرغم من عدم إشباع التبرير (التفسير) الذي يمكـن أن تشترطه، بعد ذلك تم محو نقطة التفرع كلية، وربما كان هذا هو السـبب وراء إلغاءهـا وبقاء نظرية الأنماط البسـيطة، والتـي بررهـا كـلٌ مـن (**فتجنشتين*** Ludwig Wittgenstein**(١٨٨٩-١٩٥١)، **رامزي**)[٣٧].فقام الأخير بتطوير وتبسيط نسـق **رسل**، حيث لاحظ أنه يمكن اختزال الصعوبات التي تعود إلى المفارقات المنطقيـة، وذلـك إذا أخذنا في الاعتبار أن هذه التناقضات لم تظهر كلها في المنطق والرياضيات[٣٨]. كما أعاد تنسيق وترتيب هذه النظرية من خلال تفسير القضايا بوصفها قيم صدق ودالات قضـوية (مكونة من متغيرٍ واحدٍ أوعدة متغيرات) كدالات صدق. وبذلك تكـون قـوانين منطـق

القضايا الكلاسيكي صحيحة وواضحة، وكذلك قوانين السور، مادام السور مقيداً للمجالات المتناهية، على الرغم من أنها لا تبدو ممكنة إذا أردنا أن تؤلف معنىً للتسوير فوق المجالات اللامتناهية كمجال الأعداد الطبيعية[٣٩].

وقد تركزَ الجهد الرياضي الرئيسي لنظرية الأنماط على إيجاد الأنساق الصورية المناسبة لإضفاء الصورية على الجزء الأكبر من الرياضيات البنائية كما بين **"بيشوب E. A. Bishop*(١٩٢٨-١٩٨٣)"**. فاستخدمت نظريات البناءات لتحليل المعلومات الإضافية الواردة في القراءة البنائية للعبارات الرياضية، في الوقت الذي اهتم فيه الفلاسفة بالجوانب النسقية للعلاقة[٤٠].

والرياضيات البنائية التي قال بها **"بيشوب"** تقرر أن جميع النتائج تكون صحيحة كلاسيكياً، وأن هناك اصطلاحات قليلة ربما تكون مركبة بالنسبة للقارىء الذي يريد أن يفهم البحث كلاسيكياً[٤١].، أي أنه يشير إلى وجود أزمة للرياضيات المعاصرة، سبب وجودها علماء الرياضيات أنفسهم، بسبب عدم اتساق البحث الرياضي، واهتمامهم فقط بمعنى نتائجهم كطريقة لحل المشكلات الصعبة[٤٢].أول هذه المشكلات أن كل مجموعة أ تعرف علاقة تكافؤ صريحة =أ. ونحن غالباً لا نكتب العلاقة "=أ" صراحة للإشارة إلى التكافؤ، وإنما نقول بدلاً من ذلك نقول أن العناصر أ و ب في المجموعة "أ" تكون متطابقة إذا وفقط إذا كانت تحمل كذا وكذا، وقد كان من إحدى نتائج هذه الرياضيات أنها حددت مصادر اللبس أو الغموض الذي يتمثل في التمييز بين السلب "**¬ أ = ب**"، وعدم التكافؤ"أ ≠ **ب**"، كما حددت العلاقات الإيجابية الفريدة، على سبيل المثال الأعداد الحقيقية **ح** يمكن تعريفها من خلال تعريف متواليات **كوشي** للأعداد العقلية، ومساواة **ح** تعرف **(ح ن)** = **ح (أ ن)** إذا وفقط إذا كانت:**ح ن – أ ن** تلتقي بصفر مثل: ~ ← ∞. والتي تعد ضمن جبر **بول Boole(١٨١٥-١٨٦٤)"****

ومنها كذلك الحلقات التبادلية Commutative Rings*التي مفادها أن أ = (أ، +، صفر) تكون بوليانية، أو ضمن جبر **بول**[٤٣].استفاد **"بول"** من أستاذه **"أغسطس دي مورجان**A.de Morgan(١٨٠٦-١٨٧١)" وكان "**دي مورجان**" عالم رياضيات أيضاً معنياً بتطبيق الأدوات الرياضية على المنطق التقليدي، وفي كتابه "**المنطق الصوري**-١٨٤٧" صاغ نظرية العلاقات لأول مرة في صورةٍ رمزية، وعلم "**بول**" أن المنطق يمكنه استخدام أساليب الرياضة وأن قوانين الجبر يمكن تعميمها بصرف النظر عن تفسيراتها الجزئية. فاستطاع **بول** أن يصل إلى جبر عام مجرد يتمثل في قوانين الفكر الأساسية، واستبعاد اللغة الجارية كوسيط غير دقيق والتعبير عن هذه القوانين بلغة رمزية دقيقة كلغة الحساب، وإقامة علم المنطق على هذا الأساس .هكذا أسس المنطق الرياضي بكتابي **"جورج بول":** "**التحليل الرياضي للمنطق**-١٨٤٧" و "**فحص قوانين الفكر** – ١٨٥٤" نلاحظ أن الأول صدر في عام صدور كتاب أستاذه مورجان نفسه. فيمكن اعتبار هذا العام (١٨٤٧) عام ميلاد المنطق الرياضي الرمزي الحديث[٤٤]. قدم **بول** الفكرة التي مفادها: إذا كانت "**أ**^{٢}= أ" بالنسبة لكل "**س** ∈ أ"[٤٥]. والتي تشير إلى القضية الفردية التي تجمع بين خصائص كل من القضايا الكلية والجزئية. فمثلاً لو قلنا بالقضية الجزئية التالية : "**س** ∈ أ".

فإن ما تؤكده هو أن "س" ككل عضو في الفئة "أ"، وأن الفئة "أ" هي فئة ذات أعضاء، ولهذا فإن القضية المفردة تكون فريدةً من نوعها ولا يمكن توحيدها مع أي من

القضايا الكلية أو الجزئية[٤٦].وهي الفكرة التي يركز عليها "**كوكاند**" جيداً في حساب البناءات، لاحظ أننا لا نفترض أن اتحاد أ =١، لكن إذا كان اتحادها =١ فسوف تكون أ ضمن جبر **بول**[٤٧].

في حساب البناءات عند **كوكاند** نحتاج إلى أن نثبت الصيغ التي نتعامل معها، وهو ما يطلق عليه التفسيرات الحدسية القياسية لمعنى الثوابت المنطقية، حيث يشتمل معنى الصيغة على ثوابت منطقية بعينها لها ما يثبتها؛ فعلى سبيل المثال عند البرهنة على صيغة ذرية تعبر عن نتيجة الجمع نحتاج ببساطة إلى أن نعرف الجمع ونوضحه.

- للبرهنة على الوصل "ق Λ ل" يجب أن نبرهن على **ق** وأن نبرهن على **ل**.
- للبرهنة على الفصل "قV ل" يجب أن نبرهن إما على **ق** أو على **ل** [٤٨].

لا توجد أدنى صعوبة بالنسبة للوصل لأن "ق Λ ل" يمكن تأكيدها إذا وفقط إذا كان كلٌ من "ق" و "**ل**" مؤكدين، ولا من الفصل"قV ل" الذي يمكن تأكيده إذا وفقط إذا كان أحد مركبي القضية على الأقل مؤكداً، إما "ق" أو "**ل**".

- النفي "¬ق": يقصد به النفي الرياضي القوي، ومعناه أن القضية "ق" تتطلب دائماً بناءً رياضياً بتحديدٍ معين، القضية "¬ق" يمكن تأكيدها إذا وفقط إذا عرفنا البناء الذي يفترض أن البناء "**ق**" يؤدي اتمامه إلى تناقض[٤٩].
- للبرهنة على اللزوم "ق ⊂ ل" يجب أن نبين كيف نبرهن على "ل"، وبالتالي نستطيع أن نبرهن على "ق"، وهذا معناه أن نتعلم كيف نحول أي حالة للمسائل فنبرهن على "ق" ونبرهن على "**ل**" في وقتٍ واحد.
- للبرهنة على التسوير الكلي **"**∀س ق"، يجب أن نوضح كيفية البرهنة على أي بناء "س" (من النمط الصحيح)، أي أن نبرهن على **"ق"** بالنسبة لتلك القيمة في "س".

للبرهنة على التسوير الوجودي "∃س ق" يجب أن نحدد متغير س (من النمط الصحيح) وأن نبرهن على "ق" بالنسبة لتلك القيمة الموجودة في "س"[٥٠].

ب: أهداف نظرية البناءات عند كوكاند

تتلخص أهداف نظرية البناءات في النقاط التالية:

أ- تقديم نسق منطقي متصل من الاستدلال البنائي، يولي حساب المحمول أهمية فلسفية، تستخدم لإعطاء تفسير فلسفي مقبول للأنساق الصورية، مثل تحسيب "**هايتنج Arend Heyting** (١٨٩٨- ١٩٨٠)" بطريقةٍ تطابق المعاني المقصودة من الثوابت المنطقية، و تستخدم نظرية البناءات الناجحة في تسليط الضوء على المناطق الضبابية للمنطق الحدسي، على سبيل المثال: لماذا يكون مبدأ الوسط الممتنع Excluded Middle غير محدد بنائياً؟[٥١]. رغم أن هذا المنطق يعد وسيلة لتجنب المفارقات التي ترتبط برياضيات اللامتناهي التي تتعدى المتناهي[٥٢]. ومن المعروف أن مدرسة الاتجاه الحدسي تثبت من وجهة نظر منطقية بحتة، أن مبدأ الوسط الممتنع لا يعتبر صحيحاً بشكلٍ مطلق، وإن كانت المفارقات تتسبب في الواقع في عدم صحة هذا المبدأ، وذلك بما تقدمه من قضايا لا يمكن التصريح فيها سواء بالصدق أو الكذب. وللخروج من هذا المأزق قدم الرياضي الهولندي "**بروور** Brouwer (١٨٨١-١٩٦٦)" نظرية فلسفية ــ منطقية جديدة عرفت بالحدسية عام ١٩٠٧[٥٣].

أما **كوكاند** فيجيب عن السؤال لماذا يكون مبدأ الوسط الممتنع غير محدد بنائياً من خلال التعريفات غير الصورية التي يقدمها للثوابت المنطقية، والتي تتسق مع المنطق الكلاسيكي.

ب – تحقيق كمال حساب المحمول الحدسي والأنساق الصورية الأخرى، مع مراعاة المعاني المقصودة للثوابت المنطقية(٥٤).

اقترح **كوكاند** المحمول "م ↓ س" الذي سماه بالمحمول الحَذِر * guarded الذي يُعرَّف مباشرة من خلال تحليل البناء التركيبي للحد الذي يعد تركيبياً للقضية الأساسية، والذي يظهر دوره عندما يحدد التعريف التكراري "س . م " موضوعاً كلياً فريداً، هدفه تفسير السؤال عن الأنماط الاستقرائية المشتركة في مقولة كلية **(العلاقات الجزئية المتكافئة)**، مقولة الحسابات الكلية.

ويتمثل إسهام **كوكاند** في تزويد المحمول الحَذِر "م ↓ س" بالإطار السيمانطيقي الذي له عدة مزايا:

أ- يبرر ويزود حدس القواعد النمطية، مما ييسر فهم النسق سيمانطيقياً.

ب- يقترح قواعد نمطية جديدة وتبسيطات للقواعد الموجودة، منها: ١- قاعدة تعريفات النمط التكراري المتداخل، ٢- طريقة تنميط التعريفات التكرارية دون وضع علامات للأنماط (٥٥).

وقد تطورت نظرية الأنماط الحدسية من خلال المحمولات، والتي توصف بأنها محمولية **(أو متشعبة)**، لكنها خلت من تشعب نظرية الأنماط الذي قال به "**رسل**" باعتبارها تلاحظ تطوير الأجزاء الأولية للرياضيات، مثل نظرية الأعداد الحقيقية، بسبب حضور المُعامل الذي يسمح بصياغة الحاصل الديكارتي لعائلة محددة من المجموعات، بالأخص مجموعة جميع الدالات(٥٦).

أما "**كوكاند**" فقد اختلفت نظرته إلى نظرية الأنماط البسيطة، التي اعتبرها غير محمولية، إلا أنه أكد أنه يمكننا أن نعرف الموضوع **ك (س، ص)** للنمط **(أ، أ)** من خلال **∀ م [م (س) ⊂ م (ص)]****. التي تشير إلى حساب المحمول نظراً لوضع السور الكلي في بدايتها، قائلاً: افترض أن لدينا فردين "**أ، ب**" مثل **ك (أ، ب)** محمولين، يمكننا أن نعرف **ق (س)** لتكون **ك (س، أ)**. حينئذٍ يتضح أن **م (أ)** محمولاً، بما أنها تكون **ك (أ، أ)** محمولاً، وبذلك تكون **م (ب)** محمولاً كذلك، أي أننا قد أثبتنا بطريقةٍ غير محمولية أن **ك (أ، ب)** تنطوي بداهةً على **ك (ب،أ)**(٥٧).

جـ – تفسير أو طرد مفهوم "**بروور**" من "برهان التحليل الكامل" بالطريقة التي يستخدم بها في برهانه على نظرية

"**مايكل بار** Michel Barr"*الاستقرائية(٥٨).فالرياضيات تبعاً لبروور، إنما تتطابق مع الجزء المضبوط من تفكيرنا. ووفقاً لذلك فإن التفكير الدقيق في أي جانب من جوانب النشاط، سواء العلمي منه أو المتعلق بالحياة اليومية، إنما هو الرياضيات. وأنه بسبب ذلك غير ممكن للرياضيات ألا تكون متضمنة في الفلسفة أو أي علمٍ آخر، طالما أنها تمثل التفكير الدقيق، وترمز إلى كل ماهو دقيق ومضبوط في كل هذه العلوم، وبالتالي. فإن الرياضيات لايمكن أن تسلم بوجود أي علمٍ آخر، لا المنطق ولا الفلسفة، طالما أن هذه العلوم تفترض وجود الرياضيات. فيما يتعلق بما تتضمنه من تفكيرٍ دقيق ومضبوط(٥٩).

أما نظرية "**بار**" فتنص على أنه: إذا كان من الممكن البرهنة على الصيغة الهندسية تقليدياً من خلال المسلمات، حينئذٍ يكون هناك برهاناً بنائياً، هذا البرهان يأخذ شكل نسق الشجرة** المتفرعة التي تشير إلى ديناميكيته، وتمثل مبرهنة "**بار**" ومبرهنة "الاكتمال" نتائجاً إرشادية من وجهة النظر البنائية، إلا أنه قد تم البرهنة عليهما باستخدام وسائل غير بنائية(٦٠).

د ـ مقارنة الاستدلال الحدسي باستدلال "**ديفيد هلبرت** David Hilbert(١٨٦٢-١٩٤٣)" المتناهي(٦١).حيث يعد هلبرت أول من فتح باب الأبحاث في أنساق البديهيات، ولقد تجمعت من حوله مدرسة كرست جهودها لما يسمى بمشكلة الأسس في الرياضيات، وذلك لتبرير النظريات الرياضية عن طريق دراسة عدم تناقضها وغير ذلك من الصفات(٦٢).

هـ – مقارنة مفهومات البنائيين المختلفة للبرهان البنائي المقترح بالالتزام الشائع لقوانين حساب المحمول عند "**هايتنج**" والتحسيب.

و– تقييم تمييز "**ساندهولم** Sundholm, B.G(١٩٥٣ –)***" للبرهان كمعالجة للبناء بوصفه موضوع.

لكن ما المقصود بالبرهان من وجهة نظر "**ساندهولم**"؟ يتساءل **ساندهولم** هل تظهر البراهين في صورة توالٍ، أم في صورة أعمدة من الصيغ مثل أعمدة البرهان في المنطق الصوري الكلاسيكي؟ حيث تعني حالة العبارة "Λ" أن الطريقة الوحيدة للبرهنة على "أ Λ ب" تكون من خلال تقديم "– Λ" من خلال "أ" و"**ب**"، بينما تقول العبارة "–V" أن الطريقة الوحيدة للبرهنة على "أ V **ب**" تكون من خلال تقديم "–V" من خلال "أ" أو الشكل "**ب**". أما بالنسبة لمعنى العبارة "– ⊂" فإنها تعني أن البرهان على "أ ⊂ ب" يكون برهاناً على "ب" من خلال المقدمة المنطقية premise "أ"، وبالمثل يكون البرهان على "∀س أ" متغيراً حراً يبرهن على "أ". على الرغم من أن هذا البرهان بالنسبة ل "**دومت** Michael Dummett(١٩٢٥-٢٠١١)" يكون بعيداً جداً عن التعقيد، كما يمكن تحديد الاستقراء أو الاستدلال inference من خلاله:

∀س أ (أ ⊂ ب)
―――――――――
∃ س أ ⊂ ∃ س ب

من هذا الأساس.

أما الرأي الثاني فيرى أصحابه أن البرهنة على "أ Λ ب" تأتي في صورة زوج **(ق، ل)**، حيث تكون "**ق**" برهاناً على "أ" و "**ل**" برهاناً على "ب"، كما أن البرهان على "∀س أ" يكون في شكل دالة تقوم بتحويل أي "**س**" إلى برهانٍ على "أ". وبالمثل بالنسبة للعبارات الأخرى، وبناءً على ذلك لايكون البرهان في شكل سلسلة من الصيغ، وإنما في صورة زوج، أو دالة من نمط محدد، أو أياً كان البناء الآخر الذي تتطلبه عبارات البرهان، وسنلاحظ أن تعريف البرهان على "أ Λ **ب**" مساوٍ Tantamount لتعريف "**ق، ل**" التي تساوي الزوج **(ق، ل)**، لذلك حتى وإن كان البرهان ليس زوجاً حقيقياً. فإن البرهان والزوج يمكن تحويلهما إلى حالة مساواةٍ داخلية، وتوضيح أن تصوير تعريف أحد الحالتين يعد تعريفاً للحالة الآخرى، وقد لاحظ "**دومت**" أن هذا الرأي لا يفرق بين وجهة النظر الحدسية بدقةٍ، وبين كيفية صياغة البرهان في صورةٍ رمزية بوصفه بناء.

في البناء نقوم بداية بالتخلي عن التمييز بعناية بين الاشتقاق derivation، الذي يظهر في شكل عمودٍ من الصيغ يتطابق مع البديهيات و معظم قواعد النسق البديهية، وبين البرهان الحدسي الذي يكون زوجاً، اولدالة، أو بعض البناءات الأخرى كما تتطلبها عبارات البرهان(٦٣). و هذا الأمر ما أسفرت عنه نظرية "**دومت**" في المعنى التي أعطت حساباً نسقياً، تمثل في إمكانية إدراك اللغة بشكلٍ ضمني لمن يفهمها. فإذا لم تعطي فلسفة اللغة شكلاً معقولاً للنظرية؛ فإنه لن يمكن تعيين صحة أي جزء من أجزاء التحليل(٦٤).

ز- مقارنة البرهان الحدسي للمعنى التام بالمفهومات الأضعف بصورةٍ واضحةٍ مثل برهان المتغير الحر، والبرهان المشتق من الفرضيات.

ح – فهم عدم التنبؤ بتسوير جميع البراهين في التعريف اللازم (يكون من الصعب جداً أن نجذب الانتباه إلى المعنى المقصود تماماً للزوم الحدسي في نظرية البناءات).

وقد أشار"**دومت**" عام ١٩٧٧ إلى هذه النقطة الأخيرة. فقام بتوضيح التمييز بين البراهين القانونية (البراهين المذكورة في تعريفات الثوابت المنطقية) والإثباتات demonstrations (البراهين التي تظهر في الكتب الدراسية تعني فقط بناء البرهان القانوني)، وفيها برهن على أن الفئة الكلية للبراهين القانونية يجب أن تطبق وفقاً للتركيب المنطقي الذي تشتمل عليه الصيغ، غير أن تعريفات "⊂، ∀" تصبح فارغة (وهو مايستدعي مقارنتها بنظرية "**نيلسون جودمان** **Nelson Goodman**(١٩٠٦- ١٩٩٨)" الخاصة ببناءات مفارقة الاشتمال الذاتي self - referential)* بمعنى آخر، عندما يتكلم "**دومت**" عن الحاجة إلى العبارات الثانية يستخلص من ذلك أنه لا يوجد أي تحديد داخل ما نبحث عنه، يشتمل على التركيب الممكن لبرهانٍ يخص نتيجة بعينها، ومنها يستنتج أن مفهوم البرهان القانوني لن يكون ثابتاً بالكامل، وأن هذه المبرهنات التي تتعلق بالشكل "أ ⊂ **ب**" لا يمكن أن تلاحظ دائماً كمبرهنة. فربما نخترع في يومٍ ما براهين غريبة ل "أ" فحواها أن أ لا يمكن أن تُحوَّل أبداً خلال البرهنة على "**ب**"(٦٥).

ط ـ بناء نسق من القواعد الصورية يمثل الطريقة غير الصورية الجيدة للاستدلال (الرياضي) في الشكل الاستنباطي الطبيعي، وألا تكون القواعد المعطاة صورية تماماً، على سبيل المثال قاعدة:

$$\frac{\text{أ}}{\text{أ } V \text{ ب}}$$

يكون معناها من المسلم به أن "أ" و "ب" صيغاً، وحينئذٍ فقط نقول أنه يمكننا أن نستدل على صدق "أ V ب" عندما تكون "أ" صادقة إذا قمنا بكتابة القاعدة الصورية التالية:

$$\frac{\text{أ قضية . ب قضية}}{\text{أ } V \text{ ب صادقة}} \quad \frac{\text{أ صادقة \quad أو \quad أ، ب قضية .}}{\vdash \text{ أ } V \text{ ب}} \quad \dashv \text{ أ}$$ (٦٦).

أما بالنسبة ل"**كوكاند"** فيرى أن الصياغات البسيطة البديلة التي تحتفظ فقط بمفهوم الفئات، فئات الفئات، إلخ والتي صاغها كل من **"كورت جودل Kurt Godel****(١٩٠٦-١٩٧٨)" و"**ألفرد تارسكي** Alfred Tarski(١٩٠١-١٩٨٣)" هي في الواقع نسخة بسيطة استخدمها **"جودل"**عام١٩٣١ في كتابه "**عن القضايا التقريرية غير الصورية**"(٦٧). وقد انتهى فيها إلى أنه لا يوجد برهاناً ممكناً يكون متسقاً بصورةٍ نهائية(٦٨). وقد بينت مبرهنته أن مجموعة صدق نظرية العدد الأولي ليست عدداً تكرارياً،

وبالتالي يجب أن يكون الصدق تركيبياً في نظرية العدد، ومرفوضاً في استخدام المناهج شبه التجريبية التي تمنعنا من إيجاد منهجاً واحداً لهذه الأعداد[٦٩]. وبناءً على ذلك أكدت مبرهنته عدم إمكانية اكتمال نظرية العدد في الواقع، والتي يمكن أن نجدها بوضوح في برهان الخُلف reduction ad absurdum في مقابل الحدود، لأنها لا تشتمل في خارجها على ماهو عقلي[٧٠].

ي- تظهر طرق تقديم البناءات عند تقديم الكليات Universes، لذلك يجب التأكيد على أن هناك طريقتين لتقديم الكليات: طريقة "**رسل**"، وطريقة "**تارسكي**"، الطريقة الأولى (طريقة "**رسل**") ضمنية وتستخدم في حساب البناءات وفي الأنساق النمطية المحضة، أما الطريقة الثانية فواضحة وتستخدم بصورةٍ أساسية في النظرية الحدسية للأنماط التي قدمها "**مارتن- لوف**"، في حين تعد طريقة "**تارسكي**" أساساً للطريقتين، أما طريقة "**رسل**" فتستخدم عادةً كنسخةٍ عملية غير صورية للطريقة الأخرى، في طريقة "**تارسكي**" يظهر الفرق بين الحدود والأنماط، كل نمط نوعي **ع** يكون له رمز كلي يطابقه **U**$_{ع}$ ويقوم بفك شفرة دالة **ن** $_{ع}$. إذا كان **"أ"** حداً من نمط **U**$_{ع}$. فإنه لا يكون في حد ذاته نمطاً، وإنما يكون شفرةً تقدم نمطاً، و **ن** $_{ع}$**(أ)** نمطها المتطابق، وليس هناك نمطاً لكل الأنماط، كما أن هناك حكماً مختلفاً للأنماط المصاغة بشكلٍ جيد[٧١]. لنفترض أن ع تشبه القضية، حينئذٍ يكون لدينا ع = ع′، ويكون لدينا في حالة التعدد ع، ع = صفر، أو التعدد من خلال ع′، ع′ = صفر، حينئذٍ تكون ع + ع′ = صفر، أمَّا من خلال قانون الانقباض Contraction فتصبح ع + ع′ = ١، وحينئذٍ يكون لدينا ١ = صفر، وهو ما يعد مفارقة واضحة، وقد وجد "**رسل**" جذور المفارقات في استدلالها الذاتي. فهذه القضية يمكن اشتقاقها من الدالة القضوية " **س** قضية، و **س** كاذبة"، وتنتج المفارقة عند السماح للدالة نفسها أن تكون قيمة ل **"س"**. وهذه الإمكانية يجب تجنبها، ويكون تجنبها من خلال نظرية الأنماط التي تؤسس مجالات محددة لدلالة المتغيرات في جميع الدالات أو القضايا. فإذا سمحت الدالة أو القضية نفسها بأن تكون قيمة لأحد حدودها. فسوف تحدث المفارقة، وكأننا ندور في حلقةٍ مفرغة، لأن مجال القيم المحددة للمتغير في الدالة يستبعد الدالة نفسها، أو أي شيءٍ يشتق منها[٧٢].لكن يجب معرفة أن المفارقات المنطقية متواليات لا نهائية Infinit Series من الأنماط يتم صياغتها لتلائم الحد الأدنى لمجموعة من الأوليات المنطقية: الاحتواء، والسلب، وهناك جانبان يميزان النظرية هما:ــ المذهب الأنطولوجي، والتقييد الصوري، وسوف يتم تأسيس هذان الجانبان بشكلٍ جديدٍ يخلو من الاحتواء والسلب لتجنب التأثيرات غير المنطقية لنظرية الأنماط، خصوصاً في حالة تكرار أو تضاعف الثوابت المنطقية من نمطٍ إلى نمط في ظل الاعتماد الواضح للحساب المتناهي finite على بديهية اللامتناهي[٧٣]. وقد قدم **رسل** نظرية الأنماط المنطقية لتكون بمثابة الحل الذي قدمه من جانبه للمفارقات[٧٤].

رابعاً: التركيب المنطقي للبناءات عند "كوكاند"

الهدف الأساسي الذى سعى إليه "**كوكاند**" وراء صياغة حساب البناءات هو تحليل التركيب المنطقي لعبارات وبراهين الجبر المجرد Pure Algebra، حيث رأى أن هناك مفهومان للصيغة يمكن مقارنتهما:

أ- الوجود الهندسي، ب- الوجود من الدرجة الأولى.

ولكلا المفهومين خاصيةٌ تحليلية: فإذا كانت الصيغة مصاغة في منطق الدرجة الأولى، ولها برهان، حينئذٍ يمكن البرهنة عليها بطريقة الدرجة الأولى، وكذلك إذا تناولنا العبارة ذات الوجود الهندسي. فسنجد أن لها برهاناً بنائياً، لأن لها شكلاً خاصاً مثل الشكل البسيط [٢، ٧، ٩].

قدَّم "**كوكاند**" بعض الأمثلة الأساسية في الحساب تصاغ بشكلٍ مباشر من خلال التركيب المنطقي المطلوب: أول هذه الأمثلة اللزوم الذي يقع بين عبارات المُعادلات، ثانيها المثال الهندسي والدرجة الأولى، واختتم بالمثال الأكثر وضوحاً ــ على حد قوله ــ الذي يتعلق بعدم وضوح الحدس الرياضي Mathematical Conjecture وصياغة الدرجة الأولى. فرأى أنه يمكن تحويلهما إلى مشكلةٍ هندسية تطبق المنهج العام الذي يكون مثيراً للاهتمام في حد ذاته، مع العلم أننا ننظر إلى البرهان التحليلي مسبقاً، والذي يشتمل فقط على المعالجات الجبرية البسيطة، وأنه يساعد بعد ذلك في العثور على البرهان(٧٥).

لاحظ أننا قلنا في البداية أن حساب البناءات الذي قدمه "**كوكاند**" بالنسبة للغات البرمجة نسقٌ من الحساب النمطي كحساب لامدا ينتمي إلى منطق الدرجة الثانية متعددة الأشكال، إذن ماعلاقته بمنطق الدرجة الأولى؟

يتمثل أول موضوعات العمل الأساسية في استبعاد افتراضات "**نويثر** Noether*" كما يؤكد "**كوكاند**" من أجل الحصول على عبارات بسيطة من الدرجة الأولى(٧٦). وهذا الأمر يدعونا إلى التعرف على التركيب المنطقي للبناءات الذي قدمه "**كوكاند**".

يتمثل التركيب المنطقي للبناءات عند "**كوكاند**" في تقديمه لما يعرف بنظرية الحلقات التبادلية كما ذكرنا من قبل، وهذه النظرية تنتمي إلى نظرية الدرجة الأولى، وأحياناً تصاغ في صورة معادلات، وعند صياغتها في صورة معادلات لا نحتاج فيها كما يرى "**كوكاند**" سوى إلى ثلاثة رموز للدالات هي "+، **×**، **-**"، ونكتب "أ ب" عادةً للإشارة إلى "أ × ب"، ثم بعد ذلك نحتاج إلى ثابتين هما "صفر، ١"، أما المسلمات الأساسية لهذه النظرية فهي سبع مسلمات تصاغ على النحو التالي:

١- أ + (– أ) = صفر
٢- أ + (ب + جـ) = (أ + ب) + جـ
٣- أ + ب = ب + أ
٤- أ + صفر = أ
٥- أ ب = ب أ
٦- أ (ب جـ) = (أ ب) جـ
٧- أ(ب + جـ) = أ ب + أ جـ.

ومن خلال هذه المسلمات يمكن صياغة بعض المبرهنات والتصورات الأولية في مجال الجبر التبادلي المجرد. فعلى سبيل المثال يمكن تقديم مفهوم الحلقة التكاملية Integral Ring من خلال الصيغة:

أ ب = صفر ← [أ = صفر V ب = صفر](٧٧).

يحلل "**كوكاند**" بعض جوانب نظرية القياس من وجهة نظر بنائية، وذلك من خلال المجموعات الفرعية التي يمكن قياسها (الناتجة من مجموعات القياس المثالية صفر) والتي يرى من خلالها كمال جبر **بول** من الناحية المترية فقط، وليس كماله بشكلٍ عام، ومن ثم تكلم عن الحلقات الفرعية كما تكلم عن الحلقات التبادلية. فوجد أن الحلقة الفرعية مثل أ ب

= { أ∈ | أ ≥ ب} والتي من خلالها يستنتج أن العلاقة الثنائية "≠" ل "أ" علاقة قوية ذات طابع فريد، وينتج عنها الآتي:

(أ١) ¬ أ ≠ أ،

(أ٢) أ ≠ ب ⇐ ب ≠ أ،

(أ٣) ¬ أ ≠ ب⇐ أ= ب،

(أ٤) أ ≠ ب ⇐ أ+ ج ≠ ب +ج،

(أ٥) أ ب≠ صفر ⇐ أ≠ صفر و ب≠ صفر،

(أ٦) أ + ب≠ صفر أو ب ≠ صفر

يمثل القياس في حلقة **بول** "أ" مع العلاقة القوية ذات الطابع الفريد الدالة **ع** : أ ⟵ [صفر، ∞]، مثال ذلك بالنسبة لكل أ، ب ∈ أ،

(م١) ع (أ V ب) = ع (أ) + ع (ب) – ع (أ Λ ب)،

(م٢) ع (أ) > صفر ⇐ أ ≠ صفر

يكون القياس موجباً إذا كان بالنسبة لكل س∈ أ،

(م٣) أ ≠ صفر ⇐ ع(أ) > صفر.

حلقة القياس حلقة بوليانية مع العلاقة القوية ذات الطابع الفريد بجانب القياس الموجب. يكون قياس جبري في حالة حلقة جبر **بول**، وإذا كانت في الإضافة ع (١) = ١، يكون قياساً جبرياً محتملاً، ومنها استنتج القضية التالية: بالنسبة لأي حلقة بوليانية "أ" وأي دالة ع: أ ⟵ [صفر، ∞]، يكفي ع (صفر) = صفر، والتطابق (م١)، تحدد حلقة القياس من خلال "أ" عن طريق تقديم العلاقات أ ≠ **ب**[٧٨].

نتج عن هذه الحلقات عدة مبرهنات أهمها المبرهنة التالية:إذا كانت "**د**" تعريفاً لمصفوفةٍ مربعة square matrix فوق الحلقة الفرعية **ع**، حينئذٍ تكون "**د**" مشابهة لمصفوفة من الشكل:

$$\begin{pmatrix} \text{ف} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & \text{صفر} \end{pmatrix}$$

عبارة هذه المبرهنة، بالنسبة لحجم محدد ل د تعتبر درجة أولى وهندسية[٧٩].

يشير "**كوكاند**" إلى مفهوم "الوجود الصفري القوي nilpotent" الذي لا يمكن التعبير عنه بطريقة الدرجة الأولى لأنه يتضمن فصلاً لا متناهٍ (أو التوالي، تسويراً وجودياً فوق الأعداد الطبيعية)، يشير إلى وثاقة صلة مفهوم الصيغة الهندسية بالجبر البنائي [٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩]. أحدهم يعرف بداية مفهوم الصيغة الموجبة: الصيغة الموجبة هي صيغة من لغة حلقات أنشأت مستخدمة الصيغة الذرية الموجبة (المساواة بين حدين) والروابط "V، Λ، صفر"، وتمثل الحالات الخاصة فصلاً فارغاً؛ حيث تكون الصيغة الكاذبة "⊥"، والوصل الفارغ الذي يكون صيغة صادقة "T". نسمح كذلك بالتسوير الوجودي، والتسوير الوجودي فوق الأعداد الطبيعية، والصيغة الهندسية تمثل لزوماً بين صيغتين موجبتين، لاحظ "**كوكاند**" أن أي صيغة موجبة تكون صيغة هندسية، ونفي الصيغة الموجبة يكون هندسياً. ومفهوم "أ∈ **ع**" مفهوم صفري قوي ليس من الدرجة الأولى، وإنما يمكن

التعبير عنه بالصيغة الموجبة: أ تكون صفرية قوية إذا وفقط إذا كانت أ ن = ٠ بالنسبة لبعض "ن∈ **ن**"[٨٠].

لكن إذن ما المقصود بالتركيب المنطقي؟

يضرب "**كوكاند**" المثال بالبديهية "إذا كانت ن < م" و ف : ع م موضوعية؛ حينئذٍ تكون ١= صفر∈ ع". ويرى أن التركيب المنطقي لهذه العبارة يحدث إذا حددنا "ن، م"، ولنفترض أن "ن = ٢"، و "م = ٣". فإن العبارة سوف تصبح لزوماً من خلال وصل حالات المساواة ب "١= صفر"، أو بشكلٍ آخر نقول أن الفرضية التي لدينا: "أ٢× ٣" مصفوفة "هـ"، و "أ٣× ٢" مصفوفة "و" مثل هـ و = ل، في هذه الحالة سيكون لدينا ٩ معادلات للشكل[٨١].

يؤكد **"كوكاند"** أنه إذا صيغت المبرهنة كمبرهنة من الدرجة الأولى. فإن برهانها يكون من منطق الدرجة الأولى وذلك من خلال مبرهنة الاكتمال، حتى أننا إذا تناولنا كتاباً أساسياً في الجبر المجرد. فسوف نكتشف أن البديهات الأساسية ليست مصاغة بطريقة منطق الدرجة الأولى، وذلك بسبب المفهومات المجردة، ومثل هذه المفهومات المجردة هي:

١- المُثل Ideals المختارة للحلقات التي تعرف بوصفها مجموعاتٍ فرعية، ليست مفهوماً من الدرجة الأولى.

٢- المُثل الأولية Prime أو التكاملية، ويعتمد وجودها عادةً على فرضية "**زورن** Zorn"*.

٣- النويثرية.

هذه المفهومات لها مستويات مختلفة من عدم التأثير، و يمكن الحصول على مفهوم النويثرية من التعريف الاستقرائي العام، لكننا نترك بعد ذلك منطق الدرجة الأولى. ومفهوم المُثل الأولية حتى وإن كان يبدو غير فعالٍ بشكلٍ كبير؛ إلا أنه يبدو بسيطاً عند بناء حلقات فعالة للعمليات التي يمكن حسابها، والتي تقرر وجود تكافؤًا بنائياً مع أي مجموعة فارغة من المثل الأولية[٨٢].

خامساً: **علاقة حساب البناءات بحساب لامدا النمطي**

أ ـ السبب الأساسي لنظرية الأنماط

يتألف افتراض نظرية الأنماط من تحرير اللغة من الصيغ غير المحددة بطريقة تفسر **ق**، **ل**، ..... إلخ كصيغٍ محددة، و تكون القضايا الشرطية التي يشير إليها التعبير محددةً، وهذا الأمر يؤدي إلى استبعاد مفارقة "**رسل**" و كل ما يتعلق بها[٨٣]. وقد تم تقرير هذه المفارقة على النحو التالي: إننا لو نظرنا إلى مجموعة كل المجموعات التي ليست عضواً في نفسها. فإننا سنجد على الرغم من أن هذه المجموعة ليست عضواً في نفسها إلا أنها لابد وأن تشتمل على نفسها. ولقد أوضح **رسل** فيما بعد (١٩٠٥) أن هذه المفارقة يمكن بنائها ليس فقط ابتداءً من تصوراتٍ رياضية، بل وأيضاً من تصورات منطقية خالصة، كتصور المحمول على سبيل المثال لقد رأى **رسل** أن أي محمول إما أن تنطبق على نفسه أو لا تنطبق صفته المميزة، حيث أن الوسط مستبعد، لذا فإنه إذا كان المحمول تنطبق على نفسه صفته المميزة أمكننا القول إن صفته المميزة قابلة للحمل، أما إذا لم يكن المحمول تنطبق على نفسه صفته المميزة. فإننا سنقول إن صفته المميزة غير قابلة للحمل. إلا أن ما يقبل الحمل وما لايقبل الحمل هي نفسها محمولات، ولهذا ينطبق عليها أيضاً

نفس الاستدلال، وبالتالي فإن ما لايقبل الحمل إما أن يكون قابلاً للحمل أو غير قابل للحمل لأن الوسط مستبعد. فإذا كان ما لايقبل الحمل يقبل الحمل. فإنه عندئذٍ لا تنطبق على نفسه صفته المميزة وبالتالي يكون غير قابل للحمل. أما إذا كان ما لايقبل الحمل غير قابل للحمل فإنه عندئذٍ تنطبق على نفسه صفته المميزة ولذلك يكون قابلاً للحمل[٨٤]. جمع **رسل** حلول المفارقات في كتابه "**أصول الرياضيات**" خلال تناوله لنظرية الأنماط، والتي قدمها مع تعليقٍ بسيطٍ يخص تفسير الملاحظات، وقد كان موقفه في نتائج تلك النظرية محيراً للبعض من الناحية المنطقية التي تمتد وراء المفارقات التي قدمها، وعباراتها المفصلة التي تقدم مقدمة توضيحية لجبر المنطق، ومشكلة المفارقات هي المشكلة القديمة غير القابلة للحل Insolubilia التي تصيغ النص لعددٍ من الفصول التي تدرس المنطق، وكأنها بمثابة حلقة مفرغة. فلا يوجد دالة تتخذ من نفسها حجة تدعو العقل إلى التفكير في قضايا غير قابلة للحل، وبحكم أن الدالة تكون غير حتمية إذا لم تكن قيمها محددة بوضوح. فهذا الأمر يذكرنا بالتقييد الذي درسناه في حساب المحمول، والذي يطبق فيه الفعل المضارع على الثابت فقط الذي يقع قبل الكلام وليس أثناء الكلام، وهو مايظهر بوضوح في مفارقة "الكاذب" في نظرية الأنماط، أما المثال النموذجي للمفارقات فيتمثل في العبارة "هذه القضية كاذبة" التي أشرت إليها سابقاً، والتي إذا كانت كاذبة فإنه يمكن إثبات صدقها، وإن كانت صادقة فإنه يمكن إثبات كذبها. فإذا رمزنا إلى "هذه القضية" ب "**ق**" و "كاذبة" ب "**ك**". فسوف نصيغها رمزياً بالشكل التالي:

(ق > ك) > (ق > ك)′ و (ق> ك)′ > (ق > ك).

أحد هذه التعبيرات ليس مفارقة، ذلك لأن القضية التي تشتمل على نقيضها فقط تعني أنها كاذبة، لكن نقيضها ينطوي على قضية نتيجتها كارثية[٨٥].

ويستخدم التعبير "**(ص ∈ ص)**" في الإشارة إلى القضية **ق**، وتتوافق الأنماط مع المتغيرات المتعددة في كل السياقات، بينما تظل المتغيرات غير محددة، ومن ثم يصبح السياق غامضاً من الناحية الترتيبية، بمعنى أنه يمكن ترتيب أنماط المتغيرات في صورة لزومٍ متطابق يربط الرمز (∈) بالمتغيرات فقط في حالة التسلسل التصاعدي للأنماط، وعليه رفض التعبير(الذي سيصبح صيغة بموجب النسق الأصلي) عن الصيغ التي بلا معنىً في نظرية الأنماط إذا لم تكن هناك طريقة لتحديد أنماط هذه المتغيرات تتفق مع اللزوم (∈)، ومن ثم سوف تتماشى الصيغ مع نظرية الأنماط بمعناها الأصلي في حالة وضع أعداد بدلاً من المتغيرات بالطريقة التي تعرض(∈) فقط في الصيغة:

"١ + **ن** ∈ **ن**"، ويطلق على الصيغ التي تجتاز هذا الاختبار صيغاً محددة[٨٦].

أخيراً يمكن لكل واحدٍ منا أن يرسم مُفارقة خاصة به في مفكرته الخاصة، وذلك من خلال الآتي: أن يكتب في أحد الجوانب "العبارة التي تقع في الخلف صادقة"، وأن يكتب خلفها "العبارة التي تقع في الخلف كاذبة"، ومن خلال هذا المستوى تبدو مُفارقات الاشتمال الذاتي جذابة ومجرد لعبٌ بالكلمات، وهو الأمر الذي يساعدنا على تسميتها بـ"المُفارقة" التي تقترح هاتان القيمتان الثنائيتان المتناقضتان، وهما فقط بمثابة مشكلتان واضحتان لأنهما تصوران الاستثناءات التي يمكن أن نحددها من خلال العمل، وبهذا يقدم **رسل** – كما يقول **كوسكو** Kosko (١٩٦٠–)– للمُفارقة التي تُنهي اليقين في الرياضيات منذ عهد **أرسطو** والتي بها يُعتبر **رسل** الأب الروحي للمنطق الغائم[٨٧].

ب- حساب لامدا - λ وعلاقته بالأنماط

ما المقصود بحساب لامدا؟

حساب لامدا – λ نوع من الحساب قدمه "**ألونزو تشيرش*** Alonzo Church(١٩٠٣– ١٩٩٥)" عام ١٩٣٠ يمثل الأسس الشائعة المقبولة لبرمجة الدالة، ومعناه تنميط Prototypical لغة الدالة بصورةٍ محضة، كما يُعرَّف بأنه النسخة غير النمطية لمجموعة أنساقٍ صوريةٍ تصف الدالات، والدالات التطبيقية، وهذا الحساب عبارة عن لغةٍ صورية ذات قواعد رد محددة، تهدف إلى الاستحواذ على مفهوم الدالة التطبيقية كمفهومٍ أولي، ويعد بمثابة لغة برمجة نموذجية(٨٨). كلية مصغرة للعالم، ويتألف من قاعدة تحويل (إبدال) المتغير وصيغة تعريفه إلى دالةٍ فردية تمثل طريقة لصياغة تصور فعالية الحاسوب(٨٩). نشأت أهميته الفلسفية من القوة التعبيرية للنسق الصوري البسيط؛ حيث أنه في واقع الأمر يمثل عائلة من الأنساق الصورية تنبع بالكامل من الجذر المشترك نفسه، كما تسفر المجموعات المتنوعة والتعبيرية لهذا الحساب عن نتائج في المنطق الصوري، منها نظرية الدالات التكرارية أو (العودية)Recursive Function Theory، وبعض الدالات الرياضية، ونظرية لغة البرمجة(٩٠).

ظهر المصطلح الرمزي الرياضي لامدا– **λ** في تاريخ لغات البرمجة بشكلٍ واضح في الفترة مابين عامي (١٩٣٦–١٩٥٠). عندما دافع مهندسو الحاسب الآلي بشدة عن تصوير العدد، وقاموا باختبار العديد من الصيغ المختلفة قبل الوصول إلى الصيغ القياسية الحديثة لمركبين للأعداد الصحيحة والنقطة الحرة floating للحقائق كانت متخذة بصفةٍ عامة.

لقد كان الابتكار الأساسي الجديد يتمثل في المصطلح الرمزي لفيت للتعبيرات في لغة **فورتران** Fortran، التي كانت أول لغة برمجة ذات مستوىً عالٍ في العالم، ولهذا كان تحرير المبرمج من الكتابة خارج السلاسل المملة للأوامر instructions المجمعة، ولم يكد يمضي وقت طويل على ذلك حتى خرج "**جون ماكارثي** John McCarthy(١٩٢٧–٢٠١١)" عام ١٩٦٠ بقائمته للغة التحويل List Processing Language التي تختصر إلى ليسب *(Lisp) ، وقد كانت لغته تشبه حساب لامدا بإحكام(٩١).

أما حساب لامدا النمطي فمشتق من نظرية الأنماط البسيطة عند **تشيرش**، وملخصه أن كل حد يمتلك نمطاً فريداً يشير إلى موضعه في التسلسل الهرميhierarchy للدوال. وتعرَّف مجموعة الأنماط على النحو التالي:

هناك مجموعة يمكن عدها من أساس الأنماط التي تميز النمط.

{ } تتوقف على الكذب، وإذا كانت ن١، ن٢، أنماط، حينئذٍ تكون: ن١ ← ن٢ نمطاً. ويستخدم المصطلح الرمزي التالي: إذا كانت ن، ن١،....ن ^ن^ أنماط. فإننا نستطيع أن نفهم النمط حينئذٍ عن طريق:

ن١، ن٢، ...، ن ^ن^← ن.

ن١ ← (ن٢ ← ... (ن ^ن^ ← ن) ...)، غير أن لكل نمط ن الشكل:

ن١، ن٢، ... ن ^ن^ ← خ حيث ترمز خ إلى (خلفية النمط أو أساسه)، حينئذٍ تكون ن١ بالنسبة ل ع ≥ ^ن^ تسمى مركبات من النمط ن، حيث تشير [ع] إلى أي نمط معين، ويشار إليها بالصورة الرمزية ن [ع].

بالنسبة لأي نمط ن نعرف تصنيف (ن) وحجة (ن) على النحو التالي: حجة (ن) = تصنيف (ن) = صفر بالنسبة لكل أساس نمطي ن وحجة ن [١]، ... ن [ن]←ع) =ن [٩٢].إن بناء أي فئة من **ن** أو أي أعضاءٍ أخرى يشترط البرهنة على أن **ن** تختلف عن **ن** +١[٩٣]. تكون أ علامة على نمط ن+١، و ع علامة على نمط ن، ومن ثم يُبنى هذا النسق من تصورِ فئة اختيارية، أو مجموعة فرعية لموضوعات مجالٍ domain معين، و من خلال مجموع كل الفئات الفرعية لمجالٍ معين يمكن أن نصيغ مجالاً جديداً، ويبدأ النمط التالي من مجالٍ معين للأفراد، ثم يتم تكرار هذه العملية في نظرية المجموعات[٩٤].

لم تكن ملاحظة الحدود والأنماط كبرامج وتحديدات هي الأمر الممكن فقط. فالنمط أ يمكن النظر إليه باعتباره قضية، والحد ح في أ يمكن اعتباره برهاناً على هذه القضية، وهو مايعرف بتفسير القضايا كأنماط بشكلٍ مستقل[٩٥].

وحساب البناءات الذي قدمه "**كوكاند**" بالنسبة للغات البرمجة نسقٌ من الحساب النمطي كحساب لامدا ـ λ ينتمي إلى منطق الدرجة الثانية متعددة الأشكال Polymorphic، تستخدم فيه الصيغ كمفهوماتٍ نمطية، ويتم تفسير منطق الدرجة الأعلى البنائي من خلاله، كما أنه يختلف عن نظرية النمط التي قدمها "**بير مارتن لوف** Per Martin Lof"* (١٩٤٢-)[٩٦]. والسبب في ذلك يعود إلى جبر بول. فإذا كان جبر بول قد ظل بلا فائدةٍ عملية لحقبةٍ كبيرة من الزمان، إلا أن الباحثون سرعان ما تنبهوا إلى أهمية استخدامه في مجال تحليل دوائر التحويلات التليفونية على نحو مانجده عند "**كلود شانون****Claude Elwood Shanon (١٩١٦-٢٠٠١)" الأمر الذي أدى إلى تركيز الضوء على جبر بول، مما دفع المهندسون، والعلماء بصفةٍ عامة، وعلماء الرياضيات بصفةٍ خاصة إلى استخدامه في تحليل الدوائر الإلكترونية، التي لا تعمل إلا في إحدى حالتين التوصيل أو القطع، ونظراً لاعتماد تصميم دوائر الكمبيوتر المختلفة على النظام الثنائي للأعداد. فإن قوانين المنطق الثنائي القيم، والجبر البولي على وجه الخصوص، أصبحت الركيزة الأساسية في بناء وتصميم أنظمة التحكم الآلي، والكمبيوتر، ونظرية التحويل Switching Theory، ولهذا أصبحت المعادلات البولية اليوم بمثابة اللغة التي تحددت عن طريقها الدوائر الرقمية Digital Circuits حيث تم استخدام هذه المعادلات أساساً لاختصار بعض الدوائر الإلكترونية إلى أبسط عناصرها مع الاحتفاظ بوظيفتها الأساسية[٩٧].

يفترض أسلوب البرمجة المستخدم على نطاقٍ واسع في عمليات بنية اللغات عدم انضباط الأنماط (ولغة **ليسب** Lisp مثالاً واضحاً على ذلك) على نطاقٍ واسع، كما يستلزم تعريفاً للإجراءات التي تعمل بصورةٍ جيدة على موضوعاتٍ متنوعة إلى حدٍ بعيد (على سبيل المثال، في قوائم الذرات، الأعداد الصحيحة، أو القوائم). تكون مثل هذه المرونة شبه ضرورية في هذا الأسلوب من البرمجة، في حين نجد النمط منضبطاً في لغة **ألجول** Algol* لأنها كلغة تمنع مرونة النمط المذكورة، وتمنع أيضاً أسلوب البرمجة الذي نتكلم عنه، وقد كانت لغة **ألجول** أكثر مرونة لأنها كانت تتطلب إجراء العوامل المتغيرة parameters لتكون محددة فقط باعتبارها "إجراء" بدلاً من القول "العدد الصحيح على الإجراء الحقيقي" لكن تلك المرونة لم تكن رسمية، ولم تكن كافية كذلك[٩٨].

اليوم لا تقدم العديد من اللغات القوة الوصفية الكاملة لمرفقات حساب لامدا– **λ** ، بالأخص لغات التيار mainstream جافا Java و جـ ++ التي تفرق تفريقاً دقيقاً بين أنماط البيانات الأولية Primitive data types والموضوعات من ناحية والدالات (= المناهج) من ناحية أخرى، كذلك خط التطور الذي يبدأ من قائمة لغة التحويل ليسب، على الرغم من أنه يؤدي إلى بعض الملاحظات الحقيقية مثل M L وهيسكيل التي تحد من صعوبة دمج خصائص درجة الموضوع(٩٩).

يظهر تأثير نظرية الأنماط واضحاً في نظرية الحساب Theorem Of Arithmetic التي ترتبط بالحقيقة التي تقول أن "**ن** ≠ **ن** +١" بالنسبة لـ **ن** المطلقة؛ حيث يعتمد برهان هذه النظرية على إنتاج فئةٍ على الأقل يكون أعضاءها **ن**، وهذا الأمر يمكن توضيحه على النحو التالي: نبدأ بالفصل V و الوصل Λ فنجعلهما كأي نمطٍ واحد، بعد ذلك توجد أربعة فئات تخلو فئة أو فئتين منهم من الفصلV و الوصل Λ كأعضاء، بعد ذلك توجد ١٦ فئة تخلو من فئة واحدة أومن فئتين، أو ثلاثة، أو من كل هذه الفئات الأربع كأعضاء، وبعد العدد اللانهائي لمراحل هذا النوع سوف نصل إلى مستوىً يشترط على الأقل **ن** من الفئات تؤلّف على نحوٍ متصل بفئةٍ يكون أعضاءها على الأقل **ن**، لكن هذه العملية تنقلنا إلى أعلى وأعلى في تسلسلٍ هرمي للأنماط، بناءً على ذلك يثبت البرهان فقط أن:

"**ن** ≠ **ن** +١" عندما تفسر الأعداد على نحوٍ كاف بالأنماط العليا، وربما تفشل هذه النظرية مع الأنماط الدنيا(١٠٠).

في التسلسل الهرمي للأنماط تؤلف كل الأفراد (الكيانات التي ليست قضايا ولا دالات) مجموعة من الدرجة النمطية المنطقية الأولى؛ جميع القضايا عن الأفراد فقط أو الدالات التي تكون قيماً ممكنة لحدود أفرادها فقط هي قضايا من الدرجة الأولى أو دالات، وهي أنفسها تنشيء النمط المنطقي الثاني. والقضايا أو الدالات التي تؤخذ كقيم لحدودها ليست أفراد فقط، لكن دالات الدرجة الأولى أو القضايا تنشيء قضايا الدرجة الثانية أو دالات النمط المنطقي الأعلى لتكون قضايا محمولية أو شرعية تكون قيماً لحدود أعضاء النمط الأدنى بدلاً من نفسها، ومثل هذه القضايا فقط تكون ذات معنىً تام، أي تتصف بالصدق أو الكذب. فالعبارة "هذه القضية كاذبة" تكون من الدرجة "**ن"**، وتقابل هذه القضية نفسها كحدٍ من حدودها بلا معنى(١٠١).

اختلفت صياغة الأنماط في برينكيبيا عن الصياغة التي تعتمد على حساب لامدا – λ التي قدمها "**تشيرش**"، حيث يرمز للأنماط وفقاً لحساب لامدا– λ كالآتي:

١- "أ" تشير إلى نمط الأفراد اختصار لكلمة "أفراد".

٢- **( )** تشير إلى نمط القضايا.

٣- إذا كان أ١، **...**، أ **ن** أنماط، حينئذٍ تكون (أ١، **...**، أ **ن)** نمطاً من العلاقات اللامتناهية **ن** فوق موضوعات الأنماط المتوالية **أ**١، ...، أ **ن**.

على سبيل المثال، نمط العلاقات الثنائية فوق الأفراد يكون (أ، أ)، ونمط الروابط الثنائية يكون (( )، ( ))، ونمط الأسوار فوق الأفراد يكون ((أ))(١٠٢).

وإذا كانت الأنماط تتصاعد هرمياً. فإن البناءات تتصاعد نمطياً عند "**كوكاند**" على نحوٍ شبيه بما قدمه **هلبرت** خلال تطويره لنظرية الأنماط. فبينما يرى **كوكاند** أن لدينا بناءات من النمط صفر تتعلق بالأفراد، وبناءات من النمط١ تتعلق بفئات الأفراد، وبناءات

من النمط٢ تتعلق بفئات فئات الأفراد، وهكذا[١٠٣]. يقـدِّم **هلبرت** لأنـواعٍ مختلفـة مـن المفاهيم، كمفهوم الأفراد من النمط صفر، ومحمولات لمفهوم الأفـراد تمثـل الـنمط١، ومحمولات لمفهوم الأفراد وتمثل النمط٢، إلخ، ويتفق حساب المحمولات من النمط٢ مـع الحساب السابق، وذلك من حيث الاحتفاظ بالبديهيات (البديهيات الأربع لحسـاب القضـايا بالإضافة إلى بديهيتين تمت إضافتهما إلى حساب المحمولات)، وإن كان يضم إليها، مـن ناحيةٍ أخرى، بعض الصيغ الخاصة بهذا الحساب، وبهذه الطريقة يمكنه تجنب المفارقـات كطريقة **رسل**[١٠٤].

بالنسبة إلى الجانب التطبيقي لتصاعد البناءات؛ فإن تطبيقات كلٍّ من الموضـوعات والبناءات تتحقق بشكلٍ صوري من خلال تقديم نمطين أوليين: النمط الأولـي $-\forall$ الـذي يشير إلى نمط الدالة الضمنية المستقلة، والنمط٢ الأوَّلي المعتاد الذي يشير إلى نمط الدالة المستقلة. أما استخدام التجريد غير النمطي$-\lambda$ فيؤدي إلى فحص نمط غير قابل للتحقـق حتى بالنسبة لأنساق النمط غير المستقلة، حتى وإن كان مجال التباين الحر ل ٢λ يفحص نمطاً غير قابل للتحقق، على الرغم من أن الشـكل المحـدود لإمكانيـة التحقـق يظـل ممكناً[١٠٥].

تتسلسل الأنماط في التعبير في شكل أنماطٍ دالية محضة، وتتعـدى مجموعـة مـن الأنماط الأساسية، ويكون الشكل النمطي المتعدد في التعبير بمثابة قواعد نحويـة طبيعيـة تطبَّق على الإجراء الأولي الفردي ذي الشكل المتعدد، الدالة التطبيقية، والمتغير المقيـد. بالإضافة إلى تطبيق عدة أشكال إجرائية أخرى، مثل المزاوجة أو التوفيق، وقائمة عمليـة الإجراءات (كما في المنطق الرياضي)، بجانب الأنماط التي تبنى من العلاقة الأساسية "×" (التي تشير إلى الضرب الديكارتي)، قائمة (قائمة الصياغة)، "+" (التي تشير إلى حاصـل الجمع الفصلي disjoint sum) بالإضافة إلى (نمط الدالة)[١٠٦].

لصياغة القضايا نستخدم بناء هذا النمط، ومن ثم يكون **ع** علاقـة **(أ١، ...، أ ن)** قضية إذا كانت **ع** علاقة من نمط (أ١، ...، **أ ن)**، أ $_{ي}$ من نمط أ $_{ي}$ بالنسـبة ل أ= ١، **...، ن**. هذا التقييد يجعل هذا الأمر مستحيلاً بالنسبة لصياغة قضية من الشكل **ق (ق)**: نمط **ق** يجب أن يكون من الشكل (أ)، و **ق** يمكن أن تتطبق فقط على حجج نمط أ، ومـن ثـم لا يمكن أن تطبق على نفسها، بما أن أ ليست هي نفسها (أ)[١٠٧].

في النمط النسقي يكون مفهوم **[س / س]** ص ذا معنىً تام فقط إذا كـان **ل س، س** النمط نفسه، على الرغم من أننا عندما نعرف النمط المحدد من خلال مجموعة من القواعد تعتمد على الاستبدال تكون معرفة من قبل، لايمكننـا أن نقـدم حالـة جزئيـة لتعريـف الاستبدال[١٠٨].

في الأنساق المنطقية التي تعتمد على "نظريـة الـنمط، الحـدود، الصـيغ" يطـابق المُعاملModulo العلاقة المتكافئة التي تشتمل عادةً على إمكانية تحويل بيتا**β***، وينظـر إلى الحدان المتكافئتان أو الصيغتان المتكافئتان على أنهما الشيء نفسه، كما يوجد محمولٌ قضوي يعبر عن المساواة، ومثال ذلك إثبات تساوي حدين، حيث أن الحـدين المتكـافئين يمكن إثبات تساويهما بشكلٍ واضح، والعكس ليس صحيحاً بصفةٍ عامة، ذلـك أن هنـاك فرق بين نظريـات الـنمط المفهوميـة Extensional ونظريـات الـنمط الماصـدقية Intentional: ففي نظرية النمط المفهومية يتكافيء الحدان فقط إذا كانا يمـثلان حسـاباً للقيمة نفسها، أما في نظرية النمط الماصدقية يتكـافيء الحـدان عنـدما يمكـن إثبـات

تساويهما(١٠٩). تقدم الأنماط المفردة Singleton في سياق تحديد اللغات، و يعد الاستخدام المهم للمفردات بمثابة تعريفات تقدم من خلال اختصارات، ومن خلال استخدام مجموعات شفافة نموذجية ، ولابد من ملاحظة الأنماط المفردة لأن بيتا β، وإيتاη يفشلون في فصل المرحلة. فليس من الممكن توسيع نطاق إيتا η قبل جعل بيتا β طبيعة لأن شكل الأنماط التي تمتد إليها يظل غير معروف في هذه النقطة، وليس من الممكن تأجيل امتداد إيتا η بعد جعل بيتا β طبيعية، اقترح **دي بروين**De Bruijn* تصورعدم وثاقة صلة البراهين من أجل رد أنماط برهان عدم وثاقة الصلة جنباً إلى جنب مع أنماط سيجما Σ تكون طريقة واحدة للحصول على أنماط للمجموعة الفرعية في نظريات النمط التي لها قاعدة إيتاη، ويعتمد اختبار الأنماط المستقلة على اختبار تكافؤ الأنماط، وتقيِّم التعبيرات التركيبية داخل ميدان دلالي، ثم تتحقق بعد ذلك من التعبيرات في الصيغة الطبيعية(١١٠).

هناك تشابه بين صورة عالم الأنماط للفعل، وصورة النمط أو النسق المنظم الذي أسماه "**كيمب**" بالنسق سيجما، والذي يتعلق بتفسير طبيعة الفئات المنطقية وعلاقاتها، إذ توجد أنماط الأفعال في مجموعات متناهية ولا متناهية وفي سلاسل كثيفة ومتواصلة، وهناك أنساق أفعال تشبه سلاسل الأعداد الصحيحة، وعلى أساس العلاقات المنطقية البحتة، ومبادىء النشاط العقلي يمكن تعريف وتحديد نسق منظم من الكيانات المنطقية يشمل موضوعات النسق العددي، والموضوعات الخاصة بأنماط النظام الهندسي، وموضوعات العلوم الطبيعية النظرية، وعالم الأفعال الإنسانية الفعلية والممكنة(١١١).

تكتسب لفظة "مفهوم"Intention في المنطق التقليدي دلالة خاصة مقابل مصطلح "الماصدق" Extension، أما مفهوم تصورٍ Concept ما. فيتألف من الكيفيات (الصفات) أو من الخواص التي تشكل معاً التصور. على حين يتألف ماصدق تصور ما من الأشياء التي تقع تحت هذا التصور. وبعبارةٍ أخرى، أن التصور "ما يفهم منه مجموعة صفات، و"يصدق" على أفراد. والصفات التي تُفهم من التصور تسمى المفهوم، أما الأفراد الذين يصدق عليهم التصور فيسمون بالماصدق(١١٢).

يقاوم النسق الماصدقي عند **كوكاند** النسق المفهومي الذي يعني إمكانية البرهنة تماماً على المبرهنات نفسها، في نظرية النمط، وتكون المشكلة أكثر تعقيداً مع الأنماط المستقلة، لأنها تحتوي على أكثر حدود التكافؤ التي تمتد إلى فئة صيغة إمكانية النمط Typable، وقد قدم "**مارتين. هوفمان** Martin.Hofmann"(١٩٦٥-) برهاناً دلالياً للحفاظ على نظرية النمط الماصدقية ل**"مارتن لوف"** بعددٍ من البديهيات. فقام بتحليل المشكلة نفسها في إطار يحتوي على العملية الفعالة لترجمة البرهان الماصدقي إلى مفهومي (بإضافة بعض البديهيات)، كما يمكن فحص هذه البراهين من خلال الحاسب، وبناءً على ذلك استخدم **كوكاند** "مساواة **جون ماجور** John Major equality*" التي قدمها "**س. ماكبرايد** C.Macbride(١٩٠٨-١٩٧٩)" لمقارنة حدَّان من نمطين مختلفين، وهذا الأمر يلعب دوراً مركزياً في التغلب على الصعوبات التقنية التي سببتها الأنماط التابعة(١١٣).

استخدم **كوكاند** نظرية النمط كلغة برمجة دالية، وهذا الوصف يعطي تحديداً كاملاً ونسخاً دالية محققة، بجانب تطوير اللوغاريتمات بطريقةٍ حرةٍ معقولةٍ وفعالة في جبر المنطق تشبه ما كتب في نظرية النمط. وتستخدم نظرية النمط كنموذج للرياضيات يشبه الرياضيات المستخدمة في جبر المنطق كأمر اختياري لنسق Z F*، بالإضافة إلى التقييد المحكم للبرمجة الدالية، ولهذا السبب تكون نظرية النمط أولية، وتمثل جميع المفهومات

الرياضية والبراهين حدوداً للامدا – **λ** يمكن حسابها مباشرةً، أما الحدود غيــر النمطيــة فتكون حدوداً للامدا– **λ** مع الثوابت، فمثلاً تعتبر الثوابت فوق أ تحويلاً. فإذا كـــان لـــدينا البنائي II الذي يتكون من عددين للحجة ٢ فيكتب بالشكل: II **س: أ ب** بدلاً مـــن II أ(**λ س . ب**)، أ← بدلاً من II أ(**λ س . ب**) إذا كانت س مقيدة في ب[١١٤].

كما يتضح من خلال هذا الحساب أن الفرق بـــين القضـــية Proposition والتقريـــر Assertion أو الحكم Judgment ضروري، وأن الجمع الذي يتم مـــن خـــلال وســـائل المُعاملات المنطقية (⊥، ⊂، **&**، V، ∀، ∃) ثم يحمل ليكون صادقاً، يصبح قضية. حمـــل القضية صادقة يقدم الحكم:

قضية ← (.) صادقة ← حكم.

وعلى نحوٍ خاص نجد أن مقدمات ونتيجة الاستدلال المنطقي تمثل أحكـــام، والفـــرق واضحاً بين القضايا والأحكام منذ "**فريجه**" حتى برينكيبيا، أمـــا فـــي الحســـاب النمطـــي للبناءات فقد استبدلت هذه المفهومات بمفهوماتٍ صيغية تعبر عن الصيغة والمبرهنة علـــى التوالي (في النسق الصوري). وتعرَّف القضايا بشكلٍ اســـتقرائي Inductively، وتمثـــل تصوراً مفتوحاً في مقدمات الكتب المنطقية القياسية لمنطق الدرجة الأولى، ولذلك توجـــب علينا التمييز بين ثلاث خطوات تفصيلية للصيغ:

(١) التعريف الاستقرائي للحدود والصيغ.

(٢) تحديد المبرهنات وقواعد الاستدلال.

(٣) تفسير الدلالة اللغوية (السيمانطيقية).

وتكون الصيغ والاستنباطات معانٍ فقط من خلال دلالاتها اللغوية كمـــا يقـــول "**تارسكي**" وكما يظهر في نظرية المجموعات[١١٥].

سادساً: حساب البناءات الاستقرائية Calculus Of Inductive Constructions

اقترح "**كوكاند**" مقاربة يكون هدفها تصوير الموضوعات اللامتناهيـــة، كالتيـــارات والعمليات الموجودة في نظرية النمط التأملي، والتـــي تمتـــد إلـــى الأنمـــاط الاســـتقرائية المشتركة Co-Inductive Types. فقام بتقـــديم التحلـــيلات المتعلقـــة بـــدور الأنمـــاط الاستقرائية المشتركة (أو التعريفات) في الأنساق المنطقية، كما درس نظريـــة "**بيسون** Beeson, M.J. (١٩٤٥–)"[١١٦].البنائية والتي مفادها أنه يمكن إثبـــات الدالـــة بنائيـــاً فتصبح مصاغة بشكلٍ جيد، وإذا أصبحت الدالة مصاغة بشكلٍ جيد فإنه من ثـــم تصـــبح مستمرة Continuous، الأمر المهم في دراسة هذه الدالات أن هناك دالات غير مستمرة في العلاقات. فالعبارة الصحيحة تنص على أنه إذا كانت "**د**" دالة يمكن إثباتها بوصـــفها دالة مصاغة بشكلٍ جيد من خلال المسافة المترية المنفصلة **س** إلى المسافة المتريـــة **ص**. فإنه حينئذٍ يمكن إثبات استمرار الدالة "**د**"[١١٧]. واستنتج **كوكاند** من نظرية **بيسون** عـــن الأعداد والعمليات الأولية ميزتان مهمتان اتخذهما لمقاربته هما:

(١) أن الأنماط الاستقرائية المشتركة، والبناءات المتعلقة بها، ونقض البناءات، أضـــيفت إلى النظرية، بدلاً من وجود الترتيب الثاني للأنماط وحدود – **λ** المتعلقة بها.

(٢)أن التعريفات التكرارية للموضوعات اللانهائية مقيدة، ولذلك فإن مراعـــاة العناصـــر الجزئية غير مطلوب، ومن ثم يختلف عن عمل تصوير البناءات اللانهائيـــة فـــي لغـــات البرمجة الخاملة Lazy مثل لغة هاسكل[١١٨].

ويمتد الحساب النمطي- **λ** إلى الأنماط الاستقرائية المشتركة، ولنفترض مثلاً أن "**ج**" ترمز إلى مجموعة من البناءات. و أن **ج**١، **ج**٢، **ج**٣، .... تمتد إلى "**ج**"، وأن "**ن** ن" مجموعة نمطية من المتغيرات **ن، س**، ...، تمثل صفاً من لغة الأنماط الصف وتقدَّم من خلال القواعد (غير الصورية).فإذا كانت "**ن**" صفاً نمطياً، و"**س**" نمطاً متغيراً، حينئذٍ سوف تكون المحمولات **و ج** "**ن**" (مصاغة بشكلٍ جيد)، وهناك عدة أمثلة للأنماط الاستقرائية المصاغة بشكلٍ جيد، تفترض عدم تقييد النمط "**ن**"[١١٩]. إذن ما المقصود بحساب البناءات الاستقرائية؟

حساب البناءات الاستقرائية Calculus Of Inductive Constructions"الذي يرمز إليه بـــ (CIC) نسقٌ منطقي أخذ به "**كوكاند**" كبرهانٍ مساعد، يمثل نمطاً من أنماط حساب لامدا **-λ** التابع للتعريفات الاستقرائية.ويتعلق بالمفهوم الداخلي لإمكانية تحويل(Conv) الحدود كتحويل بيتا β، وتحويلI-. اللذان يتعاملان مع نماذج متطابقة ونقاط محددة في التعريفات الاستقرائية، يُرمز إليها بعلامة التكافؤ "≡".[١٢٠].

ويختلف حساب البناءات الاستقرائية (CIC) عن النمط النسقي المجرد للبناءات الذي سماه **كوكاند** "الحساب الماصدقي للبناءات" وأشار إليه بـــ(CCE) كنوع من الحساب الممتد للبناءات ECC. ويلائم هذا النمط النسقي المجرد التسلسل الهرمي لأنماط الأنواع التصاعدية والنوع اللا محمولي، الذي يدعم التعبير عن القضايا المنطقية.

وتسمح قاعدة إمكانية التحويل بالتحويل أثناء الكتابة، وتمتد قواعد تحويل هذا النسق إلى الانعكاس، التماثل، والتعدي، وتسمى بتحويل بيتا β، ومن أجل وضوح عملية التحويل قام **كوكاند** بتحليل النسق داخل الاختزالات الرئيسية وبعض قواعد التطابق Congruence، وأشار إلى السياق الفارغ بالرمز"Ø"

<u>مميزات عملية التحويل داخل نسق حساب البناءات الاستقرائية</u>

تتمتع عملية التحويل داخل النسق بعدة مميزات أهمها:

أ- أن إمكانية التحويل عملية آلية تستخدم أثناء الكتابة كما ذكرت، ولهذا فإن معظم حسابها لا يرهق النسق، لأن ٢+٢=٤، ٢+٢= ٤على سبيل المثال (تكافيء) ≡ ٤ =٤، لذلك فإن البرهان الواضح ٤=٤ يعد أيضاً برهاناً ل٢+٢=٤. تعرف هذه النتائج بالبراهين المختصرة التي تقوم بفحص الأنماط بهدف إمكانية تقريرها. فبالنسبة إلى **م** ≡ **ن** تظهر إمكانية تقريرها عند تنمط **م، ن** بشكلٍ جيد، وهو مايعني إمكانية تقريرها في حساب البناءات الاستقرائية، ويعتمد التحويل في الحقيقة على الاختزال ← يقوم بطبعه ودمجه بقوة.

ب- في حساب البناءات الاستقرائية CIC يمكن وصف تكافؤ القضايا (تكافؤ "**ليبنتز** Leibniz (١٦٤٨- ١٧١٦)") ويوصف التكافؤ بأنه أصغرعلاقة انعكاسية Reflexive. لأن الحدان اللذان يمكن تحويلهما، يمكن أن يقوما بالبرهنة التكافؤ من خلال الانعكاس، على الرغم من وجود بعض الحدود التي لا يمكن تحويلها ومع ذلك يمكننا البرهنة على التكافؤ. فعلى سبيل المثال إذا عرَّفنا الإضافة في أعداد "**بيانو**":

إضافة صفر **ن** = **ن**

إضافة (**س م**) **ن** = إضافة **م** (**س ن**).

فإن و + ن و ن يمكن تحويلهما، ذلك لأن البرهان على ∀ ن، صفر + **ن** = **ن** يكافيء تماماً البرهان على∀ **ن**، **ن** = **ن**، أما **ن** + **و** و **ن** فلا يمكن تحويلها، لأن الإضافة تعرَّف من خلال نموذج يلائم حجتها الأولى(١٢١).

والبناءات عند **كوكاند** مثل جميع الصيغ تستخدم الحدود التي بُنيت من المتغيرات "**هـ، و، ي، هـ١**، ..." والثوابت التي يتم الاستعانة بها والتي تكتب بالطريقة التالية:

١- الثوابت والمتغيرات حدود.

إذا كان **س**، و **ص** حدَّان، حينئذٍ تكون **(س ص)**، **(λ س: س . ص)** و **(∀س: س) ص)**. ويتابع **كوكاند** باستخدام الأقواس المعتادة التي تستبعد الأقواس، ولذلك سوف تَختزل **س١ س٢ س٣ ... س ن** إلى (..((س١ س٢) س٣) ... س ن)، **λ س: س. ص** سوف تُختزل إلى **(λ س: س . ص)** و **(∀س: س) ص** سوف تُختزل إلى: **((∀س: س) ص)** في **λ س: س . ص**، و **(∀س: س) ص**، المتغير **س** مُقيَّداً لما قبله على يمين النقطتين في **ص** وليس في **س** (بينما لا يظهر في التطبيق).

تكون**[س /ص] ص** نتيجة لاستبدال **س** بواقعةٍ حرة Free Occurrence ل **س** في **ص.** أما المتغيرات المقيدة فتوجد متغيرة بصورةٍ أساسية، ويستكمل التطبيق المعتاد للحدود المتطابقة التي تختلف فقط في التغير الألفبائي للمتغيرات المقيدة. لكن يجب مراعاة أن النمط **(∀س: س)** إذا قدم باعتباره **ج س (λ س . ص)**، حينئذٍ يمكن إدراكه كنسقٍ لنمطٍ معمم محدد بالمعني الذي يقصده "**هيسكيل كيوري**Haskell Curry(١٩٠٠-١٩٨٢)"(١٢٢).

ويمتد حساب البناءات عند "**كوكاند**" إلى نمط الجداول Streams (بمعنى القوائم النهائية واللا نهائية)، مؤكداً على أهمية رد ودمج وإعادة كتابة النسق، فقام بتطبيق الأنماط الاستقرائية المشتركة على التصوير والتحقق الميكانيكي للأنساق المتفق عليها، بالاعتماد على نسقه الذي يمتد إلى الأنماط الاستقرائية، وفي هذا النسق يمكن أن تصور العملية مباشرة في المنطق بوصفها عناصر لنمطٍ محدد، على عكس من قالوا أن العمليات تصور من خلال مستوى تركيبي كعناصر استقرائية معرَّفة للنمط، أي أن التصوير الذي يعتمد بشكلٍ واضح على الأنماط الاستقرائية يكون مباشراً، لأن التكرار يبنى من خلاله، وهو ما يعد ميزةً للبراهين الصورية، إلا أن الخلاف كان حول كون هذا التصوير مرناً flexible بدرجةٍ كافيةٍ أم لا؟(١٢٣).

سمى **كوكاند** الأنماط الاستقرائية للأسماء، قوائم الاسم، والعمليات، على التوالي اسم، ١- اسم ، وحاد pi، وعرفها وفقاً لإطار **دي برويجن** كالآتي:

اسم استقرائي : مجموعة : = إشارة: طبيعي ← اسم.

١- اسم استقرائي : مجموعة : = سلب : ١- اسم | ثابت : اسم ← ١- اسم ←١- اسم.

استقراء حاد: مجموعة : =

تخطي : حاد Pi	عملية سالبة	صفر
| تقييد Res: حاد Pi← حاد Pi	تقييد أحادي	م
| حظر Ban : حاد Pi← حاد Pi	تكرار	!
| مساواة Par :حاد Pi← حاد Pi←	تركيب متوازي	١

حاد Pi		
مدخل Inp : اسم ← طبيعي ← حاد	فصل : فاعل، عدد حجج الدالة، والاستمرار	( )
مخرج Out : اسم ←١- اسم← حاد ← حاد	تصلب : فاعل، موضوع مستمر	[ ]

وتبنى الحركات Actions بالطريقة نفسها كالعمليات، بما أن الحركات ربما تحمل تقييدات حقيقية تحفظ طريق تسلسل أفكار الأسماء المقيدة داخل حركة المخرج، ويحمل هذا الأمر على حركات المدخل كذلك(١٢٤).

نتج عن نظرية الأنماط الاستقرائية **لكوكاند** صياغته لحساب باي π التي تعتمد على المصطلح الرمزي **ل دي برويجن** للأسماء، لاشتقاق عدة نتائج لنظرية حساب باي π الكلاسيكي تتضمن التطابق congruence البنائي والمبرهنات. وقد أصبح حساب باي π نموذجاً نظرياً مقبولاً للتزامن concurrency يهدف إلى لعب دور حساب لامدا- **λ** الذي يؤديه بالنسبة إلى (الدالية functional) الحساب المتسلسل sequential comutation(١٢٥).

واستخدمت براهين بعض القوانين الكلاسيكية للنظرية الجبرية لحساب باي π في إطارٍ منطقي. تسمى حدود حساب باي π بالعمليات التي بنيت بناءً على مجموعة لا متناهية من الأسماء ن = س، ص، أ، ب، .... (وتسمى أيضاً قنوات channels)(١٢٦).

كما أثار **كوكاند** العديد من الأسئلة المهمة التي تساعد في فهم النتائج التي نبرهن عليها، والتقنيات التي نستخدمها لهذه البراهين. فركز على مقارنة حدود حساب باي π بالمحاكاة الثنائية bisimulation*التي لا تبدو مفهوماً سهلاً عند البرهنة على الميكنة، ولأداء البراهين ثنائية المحاكاة استخدم نظرية التعاقب progressions(١٢٧).

الخاتمة

مفهوم البناءات المنطقية من المفهومات المنطقية المهمة جداً في الوقت الحالي، نظراً لأن معظم لغات البرمجة إن لم يكن جميعها، والتي يقوم عليها الحاسب تعتبره أساسها، وقد مر هذا المفهوم بمراحل تطور مختلفة منذ نشأ في العصور الوسطى، مروراً بعصر النهضة أو العصر الحديث، حتى وصل إلى ماهو عليه الآن، ولم يكن **تيري كوكاند** من المبتكرين لهذا المصطلح، لكنه أصبح لا يذكر الآن إلا ومعه **تيري كوكاند** و **جيراد هيوت**، إلا أنهما تأثرا ببرتراند رسل، وتحديداً **كوكاند**. فقد صنف مقال رسل الخاص بالذرية المنطقية كبداية للغات البرمجة، وهو ما تبناه كوكاند. فلم يكن تطوير كوكاند الذي تعرفه لغات البرمجة نابعاً من فراغ، بل كان امتداداً لما قدمه رسل، وهذا هو غرض البحث الأساسي. فقد تناولت الجانب المنطقي لهذه اللغات، والنزعة الفلسفية أو الإرهاصات الفلسفية لهذه اللغات، كتأكيد على أهمية معرفة الجانب التطبيقي للمنطق الرياضي، والذي أصبح مع مانسمع عنه من تطورٍ مستمر لعلاقات المنطق بالذكاء الاصطناعي لا يحتاج إلى أدنى تأكيد. فقد سبقهم رسل عام ١٩٢٠ الذي اعتبر البناءات المنطقيوة منهجاً في الفلسفة التحليلية، وقدم لها المفهومات الخاصة بها التي تعمل على تفسيرها، وقد تأثر به في ذلك كلٌ من **كارناب** و**كواين.** فقام **كارناب** ببناء العالم المادي من التجربة، واعتبر **كواين** الفئات ضمن البناءات المنطقية، كما اعتبرت آراء

رسل من قبله كذلك. فكان لدى **كوكاند** المجال خصباً للمنادة بالرياضيات البنائية التي قال بها **بيشوب** وشرحها هو أثناء حديثه عن البناءات.

كان هدف **كوكاند** من تقديم حساب البناءات تجنب المفارقات كما فعل **رسل** عندما قدم نظرية الأنماط، وقدم ما يعرف بالحلقات التبادلية، في تحليله للرياضيات البنائية. فقدم سبع مسلمات تؤيد انتماء هذه النظرية لمنطق الدرجة الأولى، واحتاجت هذه النظرية لثلاثة رموزٍ فقط (+،×، −) وثابتي الصفر والواحد، والتي تؤلف مجال الجبر التبادلي المجرد. فتأثر بجبر **بول**، واستبعد افتراضات **آمالي نويثر**، وذلك من أجل بناء عبارات من الدرجة الأولى. قال بالصيغة الهندسية، والتي تعني أي صيغة موجبة.

Abstract

Constructions Calculus

(Thierry Coquand's Constructions Analytical Study)

By Mohamed Sayed Mohamed

This research explores the term construct calculus since its inception in the 6th and 17th centuries, through the 20th century and the most important additions of messengers and contemporary regions. To this day, this research examines the logical side of structural calculation. It also sheds light on the construction of "Thierry Coquand" (1961), because the term is of great importance today among the common programming languages in the computer languages such as LISP, ALgol, Pascal, etc., as well as its importance in mathematics. In spite of the progress of these areas, the basis remains logical From the engineering perspective of the German mathematician Eueler in the sixteenth century, the idea of calculus developed into calculus. Renee Descartes discussed it in the seventeenth century with the idea of solution and its influence on François Veet and the establishment of algebraic constructions. From the construction of engineering to the construction of forced, and then moved to the presentation of the term in Bertrand Russell in his view of classes and types, and addressed the idea of logical atomic to turn the term construct on his hands to a logical construction, And focused on the Russell of some kind because of the logical importance that make the basis of mathematics logic according to his logistic approach, and his logical atomic article is a work in translation, which is in line with the goal of research, and then moved to the main research axis, Thierry Coquand, a computer scientist, and the transfer of the construction calculus to the programming languages. She explained how his account shed light on new terms and ideas such as Alonzo Church as the Lambda account, the Coquand revolution on what is known in the mathematics"Noetherian mathematics" founded by German mathematician Amalie Noether, and the construction of the inductive aspect of the constructions based on the typical aspect of Lambda's account. π calculates, and other equations that govern the language and method of work of the computer, and its spread to various technological fields, given the importance it now in our daily lives, but the basis remains logical.

الهوامش

***تيري كوكاند:** أستاذ علوم الحاسب والهندسة بجامعة شالمرزCHALMERS للتكنولوجيا بجوتنبرج بالسويد، ولد في ١٨ إبريل عام ١٩٦١ بأوسير بفرنسا، اشتهر بعمله في مجال رياضة البناءات، وخاصة حساب البناءات، كتب عدداً من المقالات المنطقية في مجال علوم الحاسب النظرية، وعلاقة المنطق بالطوبولوجيا أو علم دراسة المكان، كما تكلم عن نموذج بساطة مجموعات "**كريبك**"، وغيرهاحصل على درجة الدكتوراة تحت إشراف جيرارد هيت صاحب المفارقة الرياضية التي تعرف باسم "مفارقة جيرارد"(الباحث).

(2) Giovanni ,Capobianeo& Maria Rosaria Enea: **Geometry And Analysis In Euler's Integral Calculus**, Springer, published on line, 12 May, 2016, p3.

(٣) د. ماهر عبد القادر محمد: **نظريات المنطق الرياضي**، دار المعرفة الجامعية، الاسكندرية، ١٩٩٢، ص٩٢.

(٤) Giovanni ,Capobianeo& Maria Rosaria Enea: **Op.Cit**, p3.

(٥)د: محمود فهمي زيدان: **المنطق الرمزي نشأته وتطوره**، دار الوفاء للطباعة والنشر، الاسكندرية، ٢٠٠٢، ص١١٥.

* ليونارد أويلر من علماء الرياضيات والمنطق في القرن الثامن عشر الذين تأثروا بليبنتز، بالإضافة إلى يوهان لامبرت J.Lambert وبرنار بولزانو B. Bolzano انظر:

يمني طريف الخولي: **فلسفة العلم في القرن العشرين (الأصول – الحصاد- الآفاق المعرفية)**، عالم المعرفة، سلسلة كتب ثقافية شهرية يصدرها المجلس الوطني للثقافة والفنون والآداب، الكويت، يناير ٢٠٠٠،ص٢٥٠.

(6) Giovanni ,Capobianeo& Maria Rosaria Enea: Op.Cit, p3.

(7)**Ibid**, pp3-4.

(8)A . Church : **An Unsolvable Problem Of Elementary Number Theory** , American Journal Of Mathematics , Vol . 58 , No.2, Apr, 1936, p 346.

(9)Giovanni ,Capobianeo& Maria Rosaria Enea: **Op.Cit,**p4.

(10)**Ibid,**pp4-5.

(١١)د: محمود فهمي زيدان: **مرجع سابق**، ص ص ١١٦-١١٧.

(١٢) د : رشيد محمد الحاج صالح: **علاقة المنطق بالرياضيات عند رسل "حساب الفئات نموذجاً"**، مجلة تشرين للدراسات و البحوث العلمية، سلسلة الآداب والعلوم الإنسانية، مجلد (٢٧)، عدد (١)، ٢٠٠٥، ص١٤٤.

(١٣)د: محمود فهمي زيدان: **مرجع سابق**، ص ص ١١٧- ١١٨.

*أثار **فريجه**(١٨٤٨- ١٩٢٥) بجهازه الرمزي ونظرياته المنطقية ونسقه الاستنباطي انتباه المعاصرين له واللاحقين عليه من المناطقة؛ فراحوا يدرسون ويطورون تراثه المنطقي الضخم، ويعرضون نظرياتهم في ضوء ما ينسب إلى "**فريجه**" من مباديء وأسس منطقية. كان البعض منهم يشرح إسهام "**فريجه**" مؤيداً وكان البعض الآخر يحاول أن يختزل عدد المقدمات اللازمة للنسق الاستنباطي، وهناك من أضاف إليها، لكن يظل إسهام "**فريجه**" هو الأساس الذي تنتمي إليه معظم الدراسات المنطقية المعاصرة. انظر: د. محمد قاسم: **نظريات المنطق الرمزي**" بحث في الحساب التحليلي والمصطلح"، دار المعرفة الجامعية، الاسكندرية، ٢٠٠٢، ص ص١٤٨-١٤٩.

(14)Linsky, Bernard: **Logical Constructions**, The Stanford Encyclopedia Of Philosophy, 1st Published, Wed Nov 20, 1996.

(15)Paul J. Hager: **Continuity And Change In The Development Of Russell's Philosophy**, NIJHOFF, International Philosophy Series, Faculty Of Education, University Of Technology, Sydney, Australia, Springer Science+ Business Media, B.V, Originally Published by Kluwer Acadimic Publishers P91.

(16)Linsky, Bernard: **Op.Cit**.

*نشأت إساءة الفهم هذه بسبب افتراض وجود مسبق للفئات، وهو ما دعا **هنري بوانكاريه** 'Poincare لمعارضة تحديد الفئة بالاستعانة بعالم من الكيانات بين كل فئة متضمنة تحت اسم التعريف الجامع، ومن ثم اعتبر التقييد مجرد صياغة دقيقة لحظر التعريف المانع prohibition، و إذا كان هناك وجوداً مسبقاً لأي فئات؛ فليس هناك أدنى اعتراض على اختيار واحدةٍ منها لمعالجة الوجود المفترض سلفاً عند أصحاب المذهب التصوري. فالفئات من ناحية أخرى توجد بقدر الاستنتاج المرتب الذي يسلم به التصوري، مما يجعل موقف صاحب هذا المذهب غامضٌ ومجازي، و هو ما يظهر في عدة قوانين منطقية تعالج الصياغة الثابتة علاجاً مضللاً، ولا تفترض النظرية التصورية فئاتً وراء تطابق الفئات حتى يمكن التعبير عنها في صورة عضوية. انظر:

W . V ; Quine**: From Alogical point Of View**, Harvard University press, Cambridge, Massachusetts, 2nd ed,1961, p126.

R. M. Sainsbury ** **مارك سينسبري:** فيلسوف انجليزي ولد عام ١٩٤٣، حصل على درجة الدكتوراه من جامعة أكسفورد، شغل منصب أستاذ الفلسفة بجامعة تكساس بأوستن، اشتهر بعمله في مجال فلسفة المنطق.

([17])Paul J. Hager: **Op.Cit**, PP91-92.

*علم الهندسة الوصفية: هو علم يهتم بإسقاط مكونات الأجسام سواء النقطة أو المستقيم أو المستوى بأوضاعه الخاصة والعامة وكذلك تعاملهم مع بعض من ناحية التوازي والتعامد والتقاطع وتكون الأجسام وإفرادها وتقاطع الأجسام مع بعضها وغيره من التعاملات بينهما. انظر: د. أحمد محمد القصاص: **الرسم الهندسي (الإسقاط) الهندسة الوصفية**، مكتبة الأنجلو المصرية، القاهرة، ٢٠٠٦، ص٢٣.

(١٨) برتراند رسل: **أصول الرياضيات**، ج٢، ترجمة: محمد مرسي أحمد، مكتبة الدراسات الفلسفية، دار المعارف، القاهرة، ١٩٥٨، ص٧.

(١٩) روبير بلانشي: **المنطق وتاريخه من أرسطو حتى راسل**، ترجمة د. خليل أحمد خليل، ديوان المطبوعات الجامعية – الجزائر، المؤسسة الجامعية للدراسات والنشر والتوزيع، لبنان،٢٠٠٢، ص٢٤٠.

(٢٠)W .V ; Quine**: Methods Of Logic** , Holt, Rienehart , and Winston, Revised ed, Harvard University, New York, 1656, P40.

****نصل أوكام:** أي مبدأ (أوكام): وهو قول الفيلسوف وليام الأوكامي "ينبغي لنا ألا نكثر الموجودات بغير مسوغ"، انظر: **المعجم الفلسفي بالألفاظ العربية والفرنسية والانجليزية واللاتينية**، د.جميل صليبا، الجزء الثاني من (ط) إلى (ي)، دار الكتاب اللبناني، بيروت، لبنان، ١٩٨٢، ص٤٧٠.

([21])Paul J. Hager**:Op.Cit**, P91.
([22])Linsky, Bernard: **Op.Cit**.
([23])Jeff Speaks**: Russell On Logical Constructions And Logical Atomism**, Philosophy 370,November 4,2004,p10.
([24])Paul J. Hager: **Op.Cit**, p93.

(٢٥)د: سهام النويهي**: أسس المنطق الرياضي** (رؤية حديثة)، مكتبة النهضة المصرية، القاهرة،١٩٨٧، ص٣١.

(٢٦) **المرجع السابق**، ص ص١٢١-١٢٢.

([27])Linsky, Bernard: **Op.Cit**.

(٢٨) برتراند رسل: **مرجع سابق**، ص٣٤.

(٢٩)د. يمني طريف الخولي: **مرجع سابق**، ص٢٧٤.

* اعتبر **كواين** نظرية الفئات ضمن النظريات التي تتعلق بالشكل البنائي، انظر: محمد أبوالعلا: **الحساب المنطقي عند كواين**، رسالة ماجيستير غير منشورة، إشراف د: سهام محمود النويهي، د: إبراهيم طلبة عبد الخالق، كلية الآداب جامعة طنطا، ٢٠١٢، ص١٥٦.

(٣٠)**د**: سهام النويهي**: مرجع سابق**، ص٣٢.

** الزمكان قال به الفيزيائي "**أينشتاين**Albert Einstein (١٨٧٩-١٩٥٥)" عند تناوله لأبعاد المكان. فقال باتصالها بالزمان، لكن يجب التنويه إلى أن المكان الذي يتحدث عنه لايمكن تصوره. حيث يقول عالم الفيزياء الفلكية "**وليم كوفمان** William Kaufmann (١٨٤٩-١٩١٦)" ما نصه: "من المستحيل عملياً أن نتصور متصل المكان والزمان (المتصل الرباعي الأبعاد الناشيء، وفقاً لنظرية النسبية، من اندماج الزمان بالأبعاد الثلاثة وهي الطول والعرض والارتفاع) الملتوي ذا الأبعاد الأربعة. فالمكان الرباعي الأبعاد لا يستطيع أن يحس به أو يتخيله حتى علماء الفيزياء والرياضيات، ولكن يمكن فهمه. انظر:
روبرت م . أغروس، جورج ن . ستانسيو: **العلم في منظوره الجديد**، ترجمة د. كامال خلايلي، مجلة عالم المعرفة، المجلس الوطني للثقافة والفنون والآداب، الكويت، عدد ١٣٤،١٩٨٩، ص ٣٤.
يبحث العلماء الآن البعدد الخامس للمادة، فضلاً عن علماء الرياضة البحتة الذين وصلوا إلى البعد الحادي عشر، والبعد (ن)،

انظر:د: يمنى طريف الخولي: **مرجع سابق**، ص٢١٨.

([31])Linsky, Bernard: **Op.CIT.**

([32])Linsky, Bernard: **Op.Cit**.

(٣٣)برتراند رسل: **فلسفة الذرية المنطقية**، ترجمة د. ماهر عبدالقادر محمد، دار المعرفة الجامعية، الأزاريطة، الإسكندرية، ١٩٩٨، ص ص٤٣-٤٤.

(٣٤)انظر: د. علي عبدالمعطي محمد: **المنطق الصوري أسسه ومباحثه**، دار المعرفة الجامعية، الاسكندرية، ١٩٩٦، ص٢٤.

* **جيرارد بيير هيوت Gérard Pierre Huet** عالم فرنسي من العلماء المتخصصين في اللغويات والرياضيات وعلوم الحاسب، ولد في السابع من يولية عام ١٩٤٧، عمل مديراً للبحوث في المعهد الوطني للإحصاء، عُرف بإسهاماته في نظرية الأنماط، ونظرية لغات البرمجة، ونظرية الحساب. **(الباحث)**.

(35)Jonathan P. Seldin: **Op.Cit**, p426.

([36])Goran Sundholm: **Construction's, Proofs And The Meaning Of Logical Constants**, Journal of Philosophical Logic, published by D. Reidel publishing Company, 12 (1983), 151-172,p151.

** كان **شيفستك** Chwistek على رأس هؤلاء الذين حاولوا تحسين نسق **رسل**، حيث كان أول من اقترح استبعاد بديهية الرد، وهي البديهية التي اضطر **رسل** إلى تقريرها حتى يمكنه التغلب على بعض الصعوبات الجديدة التي ظهرت مع تقديمه للنظرية المتفرعة للأنماط، والتي وضعها **رسل** في البداية بشكلٍ مؤقت بوصفها قادرة على تقديم الحل الممكن للمتناقضات.

انظر: ديمتريو: **تاريخ المنطق" قراءات حول التطور المعاصر للمنطق**" ج٤، ترجمة د: إسماعيل عبد العزيز، دار الثقافة للنشر والتوزيع، القاهرة، ١٩٩٧، ص١٥.

*****فتجنشتين** رغم إسهامه في تطوير بعض النظريات المنطقية وتعزيز نسق **رسل**، إلا أنه ركز أيضاً على النقد الدقيق لنظريات **رسل**، بحيث حقق في هذا الجانب الكثير من الإنجازات المنطقية، وارتبط إسهامه في الجانب الرياضي بمسألتين رئيسيتين هما، نظرية الأنماط، وأكسيوماتيك **رسل**. انظر: ديمتريو: **مرجع سابق**، ص١٧.

(37)Per Martin-Lof: **Intuitionistic Type Theory**, Notes by Giovanni Sambin of A Series Of Lectures,
Given In Padua, June, 1980,pp1-2.

([38])ديمتريو: **مرجع سابق**، ص١٦.

(39)Per Martin-Lof: **Intuitionistic Type Theory**, Notes by Giovanni Sambin of A Series Of Lectures, Given In Padua, June 1980,pp1-2.

*"**إيريت ألبرت بيشوب Errett Albert Bishop**": عالم رياضيات أمريكي ولد في ١٤ يولية عام ١٩٢٨، عُرف بعمله في التحليل الذي توسع فيه. فقال بالتحليل البنائيConstructive Analysis في عملٍ قدمه عام ١٩٦٧ يحمل اسم "**أسس التحليل البنائي**" وفيه قام
بإثبات معظم المبرهنات الهامة في التحليل الحقيقي عن طريق المناهج البنائية، توفي في١٤ أبريل عام ١٩٨٣. **(الباحث)**.

([40])Goran Sundholm : **Op.Cit**,P151.

([41])Thierry Coquand, Erik Palmgren: **Metric Boolean Algebras And Constructive Theory Arch Mathelogic**,Revised:9 Nov 2000,Revised Version 23 March, 2001,Published On line, 12 june, 2002, . Springer-Verlag,2002, p688.

([42])Hilary Putnam: **What Is Mathematical Truth ?**, History Mathemtica, Repr. In Mathematics, Matter And Method, Harvard University,2, 1975, p532.

****جورج بول:** قدم نسق جبري تقوم فيه المتغيرات مقام الفئات أو الأصناف، وتمثل فيه كلاً من عمليتي الضرب والجمع طرقاً مختلفة لتأليف الأصناف من أجل استخراج أصناف أرفع، وقد تم عرض النسق أول مرة في كتاب صغر يسمى "**التحليل الرياضي للمنطق**" ونشر هذا الكتاب سنة ١٨٤٧، وأعاد تطبيق نسقه الجبري في عدة أفرع من المنطق بينها قياس المنطق التقليدي نفسه في دراسة أخرى تحت اسم قوانين الفكر. وقصد بول من هذه الدراسة إظهار أن من الجائز أن يكون المذهب الخاص بالقياس الأرسطي.

الذي كان ينظر إليه على أنه يسد نفس الحاجات والمستويات التي يسدها منطق الاستنباط، حالة خاصة من بعض أنواع الجبر المنطقي. ولم يمض وقت طويل حتى أظهر أتباع بول أن نسقه الجبري كان مجرد أحد ضروب الحساب الرمزي اللذي يتألف منه المنطق نفسه.

انظر: أ . هـــ . بيسون: **مقدمة في المنطق الرمزي**، ترجمة د: عبدالفتاح الديدي، الهيئة المصرية العامة للكتاب،القاهرة، ١٩٨٧، ص ٢٩.

* **الحلقة التبادلية**: الجبر التبادلي فرعٌ من فروع الجبر المجرد، وهي عملية تكون فيها عملية الضرب تبادلية، وتسمى دراسة الحلقات التبادلية بالجبر التبادلي، كما أن الجبر غير التبادلي هو دراسة الحلقات غير التبادلية، حيث لا يكون الضرب مطلوباً، أو ليس من الضروري أن يكون تبادلياً. والحلقة التبادلية هي مجموعة مجهزة من علاقتين **ع** ثنائيتين، بمعنى عمليات الجمع بين أي عنصرين من الحلقة لتكوين عنصراً ثالثاً، وتسمى الضرب والجمع، ويشار إليها عادةً ب"+" و "·" مثلاً "أ +ب" ، "أ ب" لتشكيل حلقة من هذين العنصرين ليعوضان عن عددٍ أو عن خصائص. انظر:

Atiyah, Michael; Macdonald, I. G. : **Introduction to commutative algebra**, Addison-Wesley Publishing Co. Balcerzyk, Stanisław; Józefiak, Tadeusz, Commutative Noetherian and Krull rings, Ellis Horwood Series: Mathematics and its Applications, Chichester: Ellis Horwood Ltd., ISBN 978-0-13-155615-7.1989.

([43])Thierry Coquand, Erik Palmgren: **Metric Boolean Algebras And Constructive Theory Arch Mathelogic**, p688.

([٤٤])د. يمني طريف الخولي: **مرجع سابق**، ص٢٧٤.

([45])Thierry Coquand, Erik Palmgren: **Metric Boolean Algebras And Constructive Theory Arch Mathelogic**, p688.

([٤٦])د: سهام النويهي: **مرجع سابق**، ص١٤٣.

([47])Thierry Coquand, Erik Palmgren: **Metric Boolean Algebras And Constructive Theory Arch Mathelogic**, p688.

([48]) Peter Fletcher: **Truth, Proof And Infinity A Theory Of Constructions And Constructive Reasoning**, Published By Springer-Science + Business Media, B.V. ,Department Of Mathematics ,Keele University, United Kingdom,Springer,1998,p77.

([49])Goran Sundholm: **Op.Cit**,p152.

([50]) Peter Fletcher: **Op.Cit**,p77.

([51])**Ibid**, pp80-81.

([52])A . Church : **A set Of Postulates For The Foundation Of Logic , The annals Of Mathematics ,** 2nd ser **,**Vol . 33, No .2.(Apr . , 1932) , pp . 346-366, p 350.

([٥٣])ديمتريو: **مرجع سابق**، ص٩٥.

([54])Peter Fletcher: **Op.Cit**,pp80-81.

* تعود فكرة المحمول الحذر إلى نسق مهندس البرمجيات الفرنسي "**إدواردو جيمينز** Eduardo.Gimenez"، الذي حصل على درجة الدكتوراه في بحثه عن حساب البناءات اللامتناهية وتطبيقاتها، وقدم فكرة التعبير عن الحالة الحذرة عن طريق الأنماط التقريبية والأنماط الفرعية، اشتهر بالعمل في مجال الرياضيات البنائية. يقوم حالياً بالتدريس بجامعة سرقوسطة الأسبانية، بقسم الحاسبات وهندسة النظم، يتعلق عمله برسوم الحاسب والذكاء الاصطناعي.

انظر: https://www.researchgate.net/profile/Eduardo_Jimenez11

([55])Roberto M. Amadios, Solange Coupet-Grimal: **Analysis of A Guard Condition In Type Theory (Extended Abstract)**,Universite De Provence, Marseille,France Lecture Notes in Computer Science, vol 1378. Springer, Berlin, Heidelberg,1998, P48.

([56])Per Martin-Lof: **Op.Cit**,p2.

** تعبر هذه القراءة عن مفارقة التناقض الذاتي، حيث يؤكد مقدمها أن **س** تنتمي إلى الفئة **س**، وتاليها أنه من الكذب أن **س** تنتمي إلى الفئة **س**، ويستنتج منهما أن القضيتان متكافئتان ومن ثم تنشأ المفارقة.

([57])Coquand ,Thierry**: Type Theory**, The Stanford Encyclopedia Of Philosophy, 1st Published, Wed Feb 8, 2006, Substantive Revision Wed, Jan 20, 2010, p8.

* **نظرية مايكل بار** Michel Barr Theorem: مهندس برمجيات، درس الهندسة الكهربية في كوليدج بارك، حصل على درجة البكالوريوس في العلوم عام ١٩٩٤، ودرجة الماجيستير في العلوم عام ١٩٩٧، قام بتدريس نظم عملية ENEE، كنظرية للتشغيل، عمل كأستاذ مساعد لقسم الهندسة الكهربية والحاسب الآلي، قدم ملاحظات على نظريات **بتنام** المنطقية خاصة اللغة العلاقية دون المساواة. فقال أنه بالنسبة لأي نموذج علاقة لا تكون فارغة أو مملوءة. فهناك نموذج آخر يكفي الدرجة الأولى نفسها من العبارات.

انظر: MIchael Barr: **Note On A Theorem Of Putnam's**, Theory And Applications Of Categories, Vol. 3, No. 3, 1997, pp. 45–49.P45.

(58)Peter Fletcher: **Op.Cit**,pp80-81.

(٥٩)ديمتريو: **مرجع سابق**، ص ص١٠٠-١٠١.

** نسق الشجرة: تعريفات نسق الشجرة تعتمد على تعريفات نسق جداول الصدق، وتعول على مفهومي الأشجار المغلقة والأشجار المفتوحة، وتعريف البرهان السليم الخاص بنسق الشجرة يقرر: أن البرهان يُعد سليماً إذا – وفقط إذا– كانت الشجرة الخاصة بالفئة المكونة من مقدمات البرهان ونقيض نتيجته شجرة مغلقة، ويكون غير سليم إذا – وفقط إذا– كانت الشجرة الخاصة بتلك الفئة شجرة مفتوحة، والخلاف الأساسي بين نسق الشجرة (ن ش)، ونسق جداول الصدق (ن ج ص) يتعلق بالتعريفات الخاصة التي يعتد بها كلٌ منهما لتوضيح سبل تعاملهما مع البراهين والفئات والقضايا: انظر: د. نجيب الحصادي: **أسس المنطق الرمزي المعاصر**، دار النهضة العربية للطباعة والنشر والتوزيع،**١٩٩٣**، من ص١١٤: ص ١٣٢ حتى ص ١٣٤.

(60)Thierry Coquand: **A Logical Approach To Abstract Algebra,Institution For Datavetens Kap**, Chalmers Tekniska Hogskola,Goteborg,Sweden, S.B.Cooper,B. Lowe,and L. Torenvliet (Eds): CIE, 2005, LNCS 3526,PP.86-95,2005.Springer-Verlag,Berlin,Heidlelberg, 2005,P88.

(61)Peter Fletcher: **Op.Cit**,p78.

(٦٢)ديمتريو: **مرجع سابق**، ص ٨٧.

*** **جوران ساندهولم** Sundholm, B.G: ولد بالسويد عام ١٩٥٣، حصل على درجة الدكتوراه عام ١٩٨٣ في أكسفورد عن موضوعه "**في نظرية البرهان**"، له مايقرب من ٥٠ مقالاً بحثياً، شارك في العديد من المؤتمرات الدولية، و أشرف على العديد من الرسائل العلمية، عمل محاضراً في جامعات "رادبود، نيجميجن،" وقارئاً لفلسفة التحليلية في استوكهولم، عين بجامعة ليدن عام ١٩٨٧، وشغل منصب عمادة كلية الفلسفة بها لأربع مرات، وعمل كأستاذٍ زائر في سيينا وريو دي جانيرو / كامبيناس وستوكهولم (مرتين). (الباحث).

(63)Peter Fletcher: **Op.Cit**,p78.

(64) David Pears**:Philosophical Theorizing And Particularism: Michael Dummett On Wittgenstein's Later Philosophy Of Language**, B.MCGUinness And G.Oliver(eds.), The Philosophy Of Michael Dummett, Kluwer Academic Publishers, 1994,p45.

*مفارقة الاشتمال الذاتي: مثل المفارقة الخاصة بكذب عبارة "هذه العبارة ليست صحيحة". فإذا صدقت فهي كاذبة، سوف أشير إليها لاحقاً.

(65)Peter Fletcher: **Op.Cit**,pp80-81.

(66)Per Martin-Lof: **Op.Cit**,p2.

** حالة **جودل** حالة خاصة. فقد لاحظ أن المنطق الرمزي بصفةٍ عامة رياضياً، بل واعتبره فرعاً من فروع نظرية العدد الأولي، وهذه الملاحظة ترجع بصفة جوهرية إلى **هيلبرت**، كما قدم الدالات التكرارية في سلسلة محاضرات ألقاها في برينستون عام ١٩٣٤، ويرجع تعريفه الحالي للتكرارية إلى كلين S.C.Kleene. انظر:

A . Church : **An Unsolvable Problem Of Elementary Number Theory** , p350.

(67)Coquand ,Thierry**: Type Theory**, p8.

(68)Hilary Putnam: **Op.Cit**, p531.

(69)**Ibid**, p529.

(70)W . V ; Quine**: From Alogical point Of View**, p137.

(71) Ali Assaf: **A Calculus Of Constructions With Explicit Subtyping**, HAL,Archives-Ouvertes,INRIA,Paris-Rocquencourt, Paris, France, Ecole Polytechniques,Palaiseau,france,Submitted On, 14 Jan 2016,p3.

(72)Edwin Guthrie: **Russell's Theory Of Types**,The Journal Of Philosophy, Psychology and Scientific Methods, Vol. 12, No. 14(Jul. 8, 1915), pp. 381-385, p382.

(73)W .V ; Quine **: From A Logical Point Of View**, p114.

(٧٤)د: محمود فهمي زيدان: **مرجع سابق**، ص٢٥.

(75)Thierry Coquand: **A Logical Approach To Abstract Algebra,Institution For Datavetens Kap**,P86.

***نويثر**: هي عالمة الرياضيات الألمانية الشهيرة "**أمالي إيمي نويثر** Amalie Noether Emmy"(٢٣مارس ١٨٨٢-١٤إبريل ١٩٣٥) عرفت بإسهاماتها المتميزة في مجال الجبر المجرد والفيزياء النظرية، وصفها **أينشتاين** Einstein، و **بافل ألكسندروف**Pavel Alexandrov بالمرأة الأكثر أهمية في تاريخ الرياضيات، باعتبارها واحدة من الرواد في مجال الرياضيات في وقتها، قامت بتطوير نظريات الحلقات، المجالات والجبر، تشرح مبرهنتها في الفيزياء "**نويثرا**" العلاقة بين قوانين التماثل والحفظ.(الباحث).

(76)**Ibid**,p86.

(77)Thierry Coquand: **A Logical Approach To Abstract Algebra,Institution**,P87.

(78)Thierry Coquand, Erik Palmgren: **Metric Boolean Algebras And Constructive Theory Arch Mathelogic** , pp688-689.

(79)Thierry Coquand: **A Logical Approach To Abstract Algebra,Institution**,P89.

(80)**Ibid**,PP87-88.

(81)**Ibid**,P88.

* **فرضية زورن:**هي نتيجة في نظرية المجموعات تظهر في براهين بعض مبرهنات الوجود غير البنائية طوال الرياضيات، تسمى أيضاً فرضية **زورن– كوراتوفسكي**Kuratowski نسبة إلى عالمي الرياضيات "**كازميرز كوراتوفسكي، ماكس زورن**"، وهي قضية في نظرية المجموعات تنص على أن المجموعة المرتبة جزئياً تحتوي على حدود قصوى لكل سلسلة (أي كل مجموعة فرعية مرتبة تماماً) تحتوي بالضرورة على عنصر واحد على الأقل. انظر:

Moore, Gregory H: Zermelo's Axiom Of Choice: Its Origins, Development & influence. Dover Publications.

(82)**Ibid**,P87.

(83)W . V ; Quine: **On The Theory Of Types**, The Journal Of Symbolic Logic, Vol 3, November, 4 Dec , 1936, p127.

(٨٤) ديمتريو: **مرجع سابق**، ص٥٥.

(85)Edwin Guthrie:**Op.Cit**,p381.

(86)W . V ; Quine: **On The Theory Of Types**, p127.

(87)Kosko. B **: Fuzzy Thinking**, **The New Science Of Fuzzy Logic** , 1st ed , Hyperion , New York, 1992, p98.

***ألونزو تشيرش** Alonzo Church: ولد في ١٤ يونيه عام ١٩٠٣ بواشنطن، تخرج في جامعة برينستون عام ١٩٢٤، حصل على درجة الدكتوراه عام ١٩٢٧، في موضوع يفترض أن الأنساق التي تقوم على بديهية الاختيار ربما تكون كاذبة، قضى عامان في الزمالة البحثية الوطنية أولهما في هارفارد، والآخر في جوتينجن وأمستردام ، عاد بعدهما إلى برينستون ليكون سبباً في رفع مكانة الكلية في شعبة الرياضيات. (انظر Jonathan . P . Seldin **: The Logic Of Curry And Church**).

(88)Samson Abramsky: **The Lazy Lambda Calculus**, Department Of Computing , Imperical College Of Science Technology And Medicin, Published in Reasearch Topics In Functional Programming, ed. D . Turner, March 6, 2006, p1.

(89)Raul Rojas : **A Tutorial IntroductionTo The Lambda Calculus** ,FU Berlin , WS-97/98 , Freie Universit¨at Berlin Version 2.0, 2015, P1.

(90)THE Internet Encyclopedia Of Philosopy , IEP , Apear-Reviewed Academic Resource . (Lambada Calculi) .

*لغة **ليسب** Lisp هي أحد لغات الذكاء الاصطناعي التي تمثل أهم ملامح الجيل الثاني الذي امتاز بظهور لغات البرمجة الراقية High Level Languages . فقد اخترع "**جون باكوث**" مع فريق من شركة "أي . بي . إم" لغة"**فورتران**" Fortran عام ١٩٥٦كأول لغة برمجية علمية، وظهرت مفاهيم الذكاء الاصطناعي وبعض لغاته مثل "**ليسب**" والتي اخترعها "**جون ماكارثي**"، وهي أول لغة برمجة خاصة بالذكاء الاصطناعي لتمثيل المعرفة ومعالجة البيانات(كيفية جعل الآلة تفكر) انظر (د: محمد مؤنس:**أسس الحاسبات الآلية**، دار الهدى للنشر والتوزيع، ط١، المنيا، ١٩٩٩، ص ٢٣).

(91)Achim Jung : **A short Introduction To The Lambda Calculus** , School of Computer Science,The University of Birmigham, Edgbaston , Birmingham , March , 18, 2004 , p2.

(92)Marek Zaionc: **Mechanical Procedure For Proof Construction Via Closed Terms Typed λ Calculus**, Department Of Computer And Information Sciences, University Of Alabama At Birmingham,University Station,Birmingham, U S A, September, 1987, PP173-174.

(93)W . V ; Quine**: From A Logical Point Of View**, p133.

(94)Thierry Coquand: **Simple Type Theory And The λ-Calculus**, The Stanford Encyclopedia Of Philosophy,(Summer 2015 Edition).

(95)Henk Barendregt & Erik Barendsen : **Introduction to Lambda Calculus** , Revised ed , December 1998, March 2000, p34.

* **بير مارتن لوف**: فيلسوف ومنطقي سويدي ولد في ٨مايو عام ١٩٤٢، اشتهر بأعماله في أسس الاحتمالات والإحصاء وأسس المنطق الرياضي وعلوم الحاسب منذ فترة السبعينات، معظم كتاباته في المنطق وفلسفة المنطق، السلاسل المنطقية، النتائج، الأحكام، تأثر نوعاً ما بفريجة و هسرل في المنطق الرياضي (الباحث).

(٩٦)Jonathan P. Seldin: **Op.Cit**, p425.

** "**كلود شانون** Claude Elwood Shanon: عالم أمريكي ولد في ٣٠ إبريل عام ١٩١٦م بمدينة ميتشجان الأمريكية الذى عرف بـــ "**أبو نظرية المعلومات**"، وهو مهندس كهربائي وعالم رياضيات حصل على جائزة من معهد **ألفريد نوبل** عام١٩٤٠م، أثبت من خلال دراسته أن الجبر المنطقي والحساب الثنائي يمكن أن يستعملا لتبسيط ترتيب الماكينات الكهربائية التبادلية، ومن ثم استعمالها في مفاتيح توجيه الهاتف، كما أثبت كذلك أنه من الممكن استعمال ترتيبات التبادليات لحل مشاكل الجبر المنطقية وباستثمار خاصية المفاتيح الكهربائية لتعمل بعلم المنطق وهو المفهوم الأساسي التي تعمل عليه الحاسبات الرقمية الإلكترونية، وفى عام ١٩٥٠اخترع فأرة سميت باسمه وهى فأرة مغناطيسية تعمل تحت سيطرة دائرة تناوبية تمكنها من التحرك بسهولة في متاهة تتكون من ٢٥ مربعاً، وهي مصممة لجعل الفأرة تبحث فى هذه المتاهات حتى تصل إلى هدف يوضع لها فى أحد الأماكن، وتعد هذه الفأرة أداة التعلم الأولى من نوعها، وفى العام نفسه نشر ورقة رائدة عن شطرنج الحاسوب الذى يؤهل الحاسوب للعب الشطرنج، انظر خلود سليمان: **أعلام فى الحاسب (كلود "شانون": أبو نظرية المعلومات)** جريدة الرياض اليومية، العدد ١٤٥٨٥، مؤسسة اليمامة الصحفية، المملكة العربية السعودية،٣٠مايو، ٢٠٠٠.

(٩٧)ديمتريو**: مرجع سابق**، ص ص ٢٥-٢٦.

* لغة **ألجول**: هي عائلة لغات برمجية أمرية طورت في منتصف الخمسينات وأثرت على العديد من لغات البرمجة الأخرى، كانت هي الطريقة المعيارية لفهم اللوغاريتمات في الكتب والمصادر الأكاديمية لمدة تزيد عن ثلاثين عام، وأخذ منها معظم لغات البرمجة الحديثة مثل كوبول وفورتران وليسب، وقد صممت لتلاشي أخطاء لغة فورتران. انظر د: محمد مؤنس: مرجع سابق، ص٢٤.

(98)Robin Milner: **A Theory Of Type Polymorphism In Programming**, Computer Science Department, University Of Edinburgh, Edinburgh, Scotland,Journal Of Computer And System Science,17,348-375,1978,p348.

(99)Achim Jung : **Op.Cit**,p2.

(100)W . V ; Quine**: On The Theory Of Types**, p131.

(101)Edwin Guthrie**: Op.Cit**,p381.
(102)Thierry Coquand: **Simple Type Theory And The λ-Calculus**.
(103)Thierry Coquand**: Type Theory**, p8.
(١٠٤) ديمتريو : **مرجع سابق**، ص٩٣.
(105)Gilles Barthe Peter Dybjer: **Applied Semantics**, International Summer School,Appsem 2000, Springer, Caminha, Portugal,September 9-15,2000, P6.
(106)Robin Milner: **Op.Cit**,p350.
(107)Thierry Coquand: **Simple Type Theory And The λ-Calculus**.
(108)Jonathan P. Seldin: **Coquand's Calculus Of Constructions: A Mathematical Foundations For A Proof Development System,** Department Of Mathematics, Concordia University, Montreal Quebec, Canda, Formal Aspects Of Computting, 1992, p427.
*لغة بيتا **β (ب)** لغة تقييدية جداً للدرجة التي تجعلها دون فائدة حقيقية لأي مهمة برمجية حقيقية؛ بما أنها لا تمتلك أي قدرة تجريدية؛ بمعنى انه ليس لديها القدرة على تعريف دالات– ليست ذات بعدٍ قوي مثل لغة البرمجة الواقعية. انظر:
George P. Loczewski **The Lambda Calculus**, A Brief Introduction, Stmv, S. Toeche-Mittler verlag, Darmstadt, Germany,1989, pp4-5.
وإمكانية التحويل بين الصيغ المصاغة تمثل علاقة تكرارية. انظر: A . Church : **An Unsolvable Problem Of Elementary,**p355.
(109)Nicolas Oury: **Extensionality In The Calculus Of Constructions**, Laboratoire De Recherché en Informatique, UMR 8623 CNRS, Universite Paris-Sud Orsay,France,J.Hurd And T.F Melham(EDS): TPHOLS,2005,lncs 3603,PP278-293,2005,Springer-Verlag,Berlin,Heidelberg,2005,P278.
* توجد متسلسلة باسمه في الرياضيات التحليلية combinatory(أخذت هذه الترجمة لكلمة تحليلية عن د. إسماعيل عبدالعزيز في ترجمته لكتاب ديمتريو الذي أشرت إليه هنا سابقاً) تعرف باسم متسلسلة **دي برويجن** وهي من الترتيب ن، والتي تشير إلى تسلسلٍ دوري للحجم، مرتب أبجدياً بحيث يظهر طول كل سلسلة ممكنة ن مرةً واحدة كسلسلة فرعية (أي بمثابة سلسلة فرعية متوالية).
(110)Andreas Abel, Thierry Coquand, And Miguel Pagano: **A Modular Type-Checking Algorithm For Type Theory With Singleton Types And Proof Irrelevance**,Springer-Verlag,Berlin, Heidelberg,2009, PP5-19, PP5-6.
(١١١)جوزايا رويس**: مبادىء المنطق**، ترجمة: أحمد الأنصاري، المشروع القومي للترجمة، المجلس الأعلى للثقافة، القاهرة، ٢٠٠٢، ص٧.
(١١٢)د.صلاح قنصوة: **فلسفة العلم**، الهيئة المصرية العامة للكتاب، القاهرة، ٢٠٠٠، ص ص١٨٢–١٨٣.
***جون ماجور**: هو مؤسس ورئيس مجموعة شركة حلول تكنولوجية، وهي شركة استراتيجية للاستشارات والاستشارات تركز أساساً على صناعة الاتصالات السلكية واللاسلكية ومقرها في رانشو سانتا في، كاليفورنيا .بعد إطلاقه في عام ٢٠٠٣، شغل **ماجور** منصب الرئيس التنفيذي ومدير أباتشيتا في الفترة من ٢٠٠٤ إلى ٢٠٠٦، وكان له دور أساسي في تأسيس الشركة كمزود رائد للتطبيقات اللاسلكية لتحسين كفاءة سير العمل. حصل على درجة البكالوريوس في الهندسة الميكانيكية والفضائية عام ١٩٦٧ من جامعة روتشستر، حيث كان عضوا في بيتا دلتا جاما الأخوة .حصل على درجة الماجستير في إدارة الأعمال مع التميز من جامعة نورث وسترن، ودكتوراه الفقه من جامعة لويولا، وعلى درجة الماجستير في الهندسة الميكانيكية من جامعة إلينوي في شيكاغو، وحصل على درجة الدكتوراه الفخرية من كلية وستمنستر في عام ١٩٩٥. ويحمل عشرات من براءات الاختراع في الولايات المتحدة.
انظر: http://www.hajim.rochester.edu/distinguished_alumni/john_major.html
(113)Nicolas Oury: **Op.Cit**, PP278-279.
Z F* : اختصار لإقرار نظرية المجموعات بالنسبة لكلٍ من **زرملو** Zermelo (١٩٠٨)، فرانكل Fraenkel (١٩٢٢).

(114) Thierry Coquand: **Towards Constructive Homological Algebra In Tybe Theory**, University ,M.Kaversal(Eds): M K M / CALCULEMUS 2007, LNAI 4573,PP40-45,2007. Springer-Verlag, Berlin Heidlberg,2007,p40.
(115)Per Martin-Lof: **Op.Cit**,p3.
****مايكل بيسون** Beeson, M.J.: أستاذ الرياضيات وعلوم الحاسب بجامعة ولاية سان هوسيية San Jose State University بكاليفورنيا بالولايات المتحدة الأمريكية، ولد في ١٩ أغسطس عام١٩٤٥ قدم شرحاً لميكنة الرياضيات الذي عرض له **آلان تورنج** (الباحث).
(116)Roberto M. Amadios, Solange Coupet-Grimal: **Op.Cit** ,P48.
(117)Michael J.Beeson:**Principles of Continuous Choice And Continuity Of Functions In Formal Systems For Constructive Mathematics**,Mathematisch Instituut,Roeteras Traat 15Amsterdam,The Netherlands, North-Holland Publishing Company, Annals of Mathematical Logic 12 (1977) 249-322.,P250.
(118)Roberto M. Amadios, Solange Coupet-Grimal: **Op.Cit** ,P48.
(119)**Ibid**,p50.
(120)Nicolas Oury**: Op.Cit**, P279.
(121)**Ibid**,P280.
(122)Jonathan P. Seldin:**Op.Cit**, pp426-427.
(123)Roberto M. Amadios, Solange Coupet-Grimal: **Op .Cit**, P48.
(124)Daniel Hirschkoff: **A Full Formalisation Of π- Calculus Theory In The Calculus Of Constructions**, C E RMICS-ENPC/INRIA and Dipartimento di Scienze dell'Informazione-Universita di Roma "La Sapienza",17 June,2005, p154.
(125)**Ibid**,P153.
(126))**Ibid**,P154.
* المحاكاة الثنائية bisimulation: في علم الحاسب النظري تعني علاقة ثنائية بين نظم انتقال الحالة التي تربط النظم التي تحترم بالطريقة نفسها، بمعنى أن النظام الواحد يحاكي الآخر والعكس بالعكس (الباحث).
(127)**Ibid**,P153.

قائمة المصادر والمراجع

أولاً: المصادر:

(1) Andreas Abel, Thierry Coquand, And Miguel Pagano: **A Modular Type-Checking Algorithm For Type Theory With Singleton Types And Proof Irrelevance**,Springer-Verlag,Berlin, Heidelberg,2009.
(2) Thierry Coquand: **A Logical Approach To Abstract Algebra,Institution For Datavetens Kap**, Chalmers Tekniska Hogskola,Goteborg,Sweden, S.B.Cooper,B. Lowe,and L. Torenvliet (Eds): CIE, 2005, LNCS 3526,PP.86-95,2005.Springer-Verlag,Berlin,Heidlelberg, 2005.
(3) Thierry Coquand, Erik Palmgren: **Metric Boolean Algebras And Constructive Theory Arch Mathelogic**,Revised:9 Nov 2000,Revised Version 23 March, 2001,Published On line, 12 jun, 2002, . Springer-Verlag,2002.
(4) Thierry Coquand: **Simple Type Theory and the λ-Calculus**, The Stanford Encyclopedia Of Philosophy,(Summer 2015 Edition).
(5) Thierry Coquand: **Towards Constructive Homological Algebra In Tybe Theory**, University ,M.Kaversal(Eds): M K M / CALCULEMUS 2007, LNAI 4573,PP40-45,2007. Springer-Verlag, Berlin Heidlberg,2007.
(6) Coquand ,Thierry**: Type Theory**, The Stanford Encyclopedia Of Philosophy, 1st Published, Wed Feb 8, 2006, Substantive Revision Wed, Jan 20, 2010.

ثانياً: المراجع الأجنبية

(1) Achim Jung : **A short Introduction To The Lambda Calculus** , School of Computer Science,The University of Birmigham, Edgbaston , Birmingham , March , 18, 2004.

(2) A . Church : **An Unsolvable Problem Of Elementary Number Theory** , American Journal Of Mathematics , Vol . 58 , No.2, Apr, 1936.

(3) A . Church : **A set Of Postulates For The Foundation Of Logic , The Annals Of Mathematics ,** 2nd ser **,**Vol . 33, No .2. Apr , 1932.

(4) Ali Assaf: **A Calculus Of Constructions With Explicit Subtyping**, HAL,Archives-Ouvertes,INRIA,Paris-Rocquencourt, Paris, France, Ecole Polytechniques, Palaiseau, france,Submitted On, 14 Jan 2016.

(5) Atiyah, Michael; Macdonald, I. G. : **Introduction to Commutative Algebra**, Addison-Wesley Publishing Co. Balcerzyk, Stanisław; Józefiak, Tadeusz, Commutative Noetherian and Krull rings, Ellis Horwood Series: Mathematics and its Applications, Chichester: Ellis Horwood Ltd., ISBN 978-0-13-155615-7.1989.

(6) Daniel Hirschkoff: **A Full Formalisation Of π- Calculus Theory In The Calculus Of Constructions**, C E RMICS-ENPC/INRIA and Dipartimento di Scienze dell'Informazione-Universita di Roma "La Sapienza",17 June,2005.

(7) David Pears**:Philosophical Theorizing And Particularism: Michael Dummett On Wittgenstein's Later Philosophy Of Language**, B.MCGUinness And G. Oliver (eds.), The Philosophy Of Michael Dummett, Kluwer Academic Publishers, 1994.

(8) Edwin Guthrie: **Russell's Theory Of Types**,The Journal Of Philosophy, Psychology and Scientific Methods, Vol. 12, No. 14(Jul. 8, 1915.

(9) George P. Loczewski **The Lambda Calculus** , A Brief Introduction , Stmv , S. Toeche- Mittler verlag , Darmstadt , Germany ,1989.

(10) Gilles Barthe Peter Dybjer: **Applied Semantics**, International Summer School,Appsem 2000, Springer, Caminha, Portugal,September 9-15,2000.

(11) Giovanni ,Capobianeo& Maria Rosaria Enea: **Geometry And Analysis In Euler's Integral Calculus**, Springer, published on line, 12 May, 2016.

(12) Goran Sundholm: **Construction's, Proofs And The Meaning Of Logical Constants** , Journal of Philosophical Logic, published by D. Reidel publishing Company, 12 (1983) 151-172.

(13) Henk Barendregt & Erik Barendsen : **Introduction to Lambda Calculus** , Revised ed , December 1998, March 2000.

(14) Hilary Putnam: **What Is Mathematical Truth ?**, History Mathemtica, Repr. In Mathematics, Matter And Method, Harvard University,2, 1975.

(15) Jeff Speaks**: Russell On Logical Constructions And Logical Atomism**, Philosophy 370,November 4,2004.

(16) Jonathan P. Seldin: **Coquand's Calculus Of Constructions: A Mathematical Foundations For A Proof Development System,** Department Of Mathematics, Concordia University, Montreal Quebec, Canda, Formal Aspects Of Computting, 1992.

(17) Kosko. B **: Fuzzy Thinking**, **The New Science Of Fuzzy Logic** , 1st ed , Hyperion , New York, 1992.

(18) Linsky, Bernard: **Logical Constructions**, The Stanford Encyclopedia Of Philosophy, 1st Published, Wed Nov 20, 1996.

(19) Marek Zaionc: **Mechanical Procedure For Proof Construction Via Closed Terms Typed λ Calculus**, Department Of Computer And Information Sciences, University Of Alabama At Birmingham,University Station,Birmingham, U S A, September, 1987.

(20) Michael Barr: **NOTE ON A THEOREM OF PUTNAM'S**, Theory And Applications Of Categories, Vol. 3, No. 3, 1997.

(21) Michael J.Beeson:**Principles of Continuous Choice And Continuity Of Functions In Formal Systems For Constructive Mathematics**,Mathematisch Instituut,Roeteras Traat 15Amsterdam,The Netherlands, North-Holland Publishing Company, Annals of Mathematical Logic 12 (1977) 249-322.

(22) Nicolas Oury: **Extensionality In The Calculus Of Constructions**, Laboratoire De Recherché en Informatique, UMR 8623 CNRS, Universite Paris-Sud Orsay,France,J.Hurd And T.F Melham(EDS): TPHOLS,2005,lncs 3603,PP278-293,2005,Springer-Verlag,Berlin,Heidelberg, 2005.

(23) Paul J. Hager: **Continuity And Change In The Development Of Russell's Philosophy**, NIJHOFF, International Philosophy Series, Faculty Of Education, University Of Technology, Sydney, Australia, Springer Science+ Business Media, B.V. Originally Published by Kluwer Acadimic Publishers,1994.

(24) Peter Fletcher: **Truth, Proof And Infinity A Theory Of Constructions And Constructive Reasoning**, Published By Springer-Science + Business Media, B.V. ,Department Of Mathematics ,Keele University, United Kingdom,Springer,1998.

(25) Per Martin-Lof: **Intuitionistic Type Theory**, Notes by Giovanni Sambin of A Series Of Lectures, Given In Padua, June 1980.

(26) Raul Rojas : **A Tutorial Introduction To The Lambda Calculus** ,FU Berlin , WS-97/98 , Freie Universit¨at Berlin Version 2.0, 2015.

(27) Robin Milner: **A Theory Of Type Polymorphism In Programming**, Computer Science Department, University Of Edinburgh, Edinburgh, Scotland,Journal Of Computer And System Science,17,348-375,1978.

(28) Roberto M. Amadios, Solange Coupet-Grimal: **Analysis of A Guard Condition In Type Theory (Extended Abstract)**,Universite De Provence, Marseille,France. Lecture Notes in Computer Science, vol 1378. Springer, Berlin, Heidelberg,1998.

(29) Samson Abramsky: **The Lazy Lambda Calculus**, Department Of Computing , Imperical College Of Science Technology And Medicin, Published in Reasearch Topics In Functional Programming, ed. D . Turner , March 6, 2006.

(30) W . V ; Quine**: From Alogical point Of View**, Harvard University press, Cambridge, Massachusetts, 2nd ed,1961.

(31) W .V ; Quine**: Methods Of Logic**, Holt, Rienehart , and Winston, Revised ed, Harvard Univer sity, New York, 1656.

(32) W . V ; Quine: **On The Theory Of Types**, The Journal Of Symbolic Logic, Vol 3, November, 4 Dec , 1936.

ثالثاً: المراجع باللغة العربية والمترجمة إليها:

(١) أحمد محمد القصاص: **الرسم الهندسي (الإسقاط) الهندسة الوصفية**، مكتبة الأنجلو المصرية، القاهرة،٢٠٠٦.

(٢)أ . هـــ . بيسون**: مقدمة في المنطق الرمزي**، ترجمة د: عبدالفتاح الديدي، الهيئة المصرية العامة للكتاب، القاهرة، ١٩٨٧.

(٣)برتراند رسل: **أصول الرياضيات**، ج٢، ترجمة: محمد مرسي أحمد، مكتبة الدراسات الفلسفية، دار المعارف، القاهرة،١٩٥٨.

(٤)خلود سليمان: **أعلام فى الحاسب (كلود "شانون": أبو نظرية المعلومات)** جريدة الرياض اليومية، العدد ١٤٥٨٥، مؤسسة اليمامة الصحفية، المملكة العربية السعودية،٣٠مايو، ٢٠٠٠.

(٥)برتراند رسل: **فلسفة الذرية المنطقية**، ترجمة د. ماهر عبدالقادر محمد، دار المعرفة الجامعية، الأزاريطة، الإسكندرية، ١٩٩٨.

(٦)جوزايا رويس: **مبادئ المنطق**، ترجمة: أحمد الأنصاري، المشروع القومي للترجمة، المجلس الأعلى للثقافة، القاهرة، ٢٠٠٢.

(٧)ديمتريو: **تاريخ المنطق" قراءات حول التطور المعاصر للمنطق**" ج٤، ترجمة د: إسماعيل عبد العزيز، دار الثقافة للنشر والتوزيع، القاهرة، ١٩٩٧.

(٨)رشيد محمد الحاج صالح: **علاقة المنطق بالرياضيات عند رسل "حساب الفئات نموذجاً"**، مجلة تشرين للدراسات و البحوث العلمية، سلسلة الآداب والعلوم الإنسانية، مجلد (٢٧)، عدد (١)، ٢٠٠٥.

(٩)روبرت م . أغروس، جورج ن . ستانسيو: **العلم في منظوره الجديد**، ترجمة د. كامال خلايلي، مجلة عالم المعرفة، المجلس الوطني للثقافة والفنون والآداب، الكويت، ١٩٨٩.

(١٠)روبير بلانشي: **المنطق وتاريخه من أرسطو حتى راسل**، ترجمة د. خليل أحمد خليل، ديوان المطبوعات الجامعية – الجزائر، المؤسسة الجامعية للدراسات والنشر والتوزيع، لبنان،٢٠٠٢.

(١١)سهام النويهي: **أسس المنطق الرياضي** (رؤية حديثة)، مكتبة النهضة المصرية، القاهرة، ١٩٨٧.

(١٢)صلاح قنصوة: **فلسفة العلم**، الهيئة المصرية العامة للكتاب، القاهرة، ٢٠٠٠.

(١٣)علي عبدالمعطي محمد: **المنطق الصوري أسسه ومباحثه**، دار المعرفة الجامعية، الاسكندرية، ١٩٩٦.

(١٤) ماهر عبد القادر محمد: **نظريات المنطق الرياضي**، دار المعرفة الجامعية، الاسكندرية، ١٩٩٢.

(١٥) محمد قاسم: **نظريات المنطق الرمزي**" بحث في الحساب التحليلي والمصطلح"، دار المعرفة الجامعية، الاسكندرية، ٢٠٠٢.

(١٦)محمد مؤنس:**أسس الحاسبات الآلية**، دار الهدى للنشر والتوزيع، ط١، المنيا، ١٩٩٩.

(١٧)محمود فهمي زيدان: **المنطق الرمزي نشأته وتطوره**، دار الوفاء للطباعة والنشر، الاسكندرية، ٢٠٠٢.

(١٨)نجيب الحصادي: **أسس المنطق الرمزي المعاصر**، دار النهضة العربية للطباعة والنشر والتوزيع،١٩٩٣.

(١٩)يمني طريف الخولي: **فلسفة العلم في القرن العشرين (الأصول – الحصاد- الآفاق المعرفية)**، عالم المعرفة، سلسلة كتب ثقافية شهرية يصدرها المجلس الوطني للثقافة والفنون والآداب، الكويت، يناير ٢٠٠٠.

رابعاً: دوائر المعارف والمعاجم:

(١)**المعجم الفلسفي بالألفاظ العربية والفرنسية والانجليزية واللاتينية**، د.جميل صليبا، الجزء الثاني من (ط) إلى (ي)، دار الكتاب اللبناني، بيروت، لبنان، ١٩٨٢.

خامساً: الرسائل العلمية:

(١)محمد أبوالعلا: **الحساب المنطقي عند كواين**، رسالة ماجيستير غير منشورة، إشراف د: سهام محمود النويهي، د: إبراهيم طلبة عبد الخالق، كلية الآداب جامعة طنطا، ٢٠١٢.

سادساً: معلومات من شبكة المعلومات الدولية(الإنترنت)

1- https://www.researchgate.net/profile/Eduardo_Jimenez11.

2- http://www.hajim.rochester.edu/distinguished_alumni/john_major.html.

3- Moore, Gregory H: Zermelo's Axiom Of Choice: Its Origins, Development & influence. Dover Publications.

4- THE Internet Encyclopedia Of Philosopy , IEP , Apear-Reviewed Academic Resource . (Lambada Calculi) .